2012 第3期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387




9 770488 738122

问题解决在美国: 1970–2008
——研究与理论、实践与政策*

215500 江苏省常熟理工学院数学与统计学院 黄兴丰编译

1. 引言: 美国国家背景

对于教育研究和课程发展来说, 一个国家的背景十分重要, 因为二者都浸濡于其中. 有的国家, 教育研究和课程发展是紧密关联的; 有的国家, 教育研究和课程发展均受国家教育部或同等机构的资助和管理, 而在美国却全然不同.

1.1 缺少统一的国家课程

美国没有统一的国家课程. 实际上, 课程一直是由教科书出版社提供的. 美国约有1万5千个学区, 直到今天, 其中大部分仍然拥有自主确定教学目标的权利, 这些教学目标之间存在很大的差异.

1.2 教育研究和课程发展界的相互独立

美国的教育研究和课程发展在很大程度上是分离的. 除了90年代, 有一门课程方案曾受到美国自然科学基金会 (US National Science Foundation) 的资助, 而且近来还继续受到美国教育部 (US Department of Education) 的青睐之外, 联邦政府的研究预案一贯倾向于资助基础性的研究. 直至今日, 也没有任何计划准备资助直接从事课程发展或课程评估的研究. 用专业的术语来讲, 80年代, 美国自然科学基金会支持的是认知过程和问题解决的研究, 到了90年代, 支持的是社会文化的研究以及跨学科的"学习理论"的研究, 近几年来, 开始支持情境性的扎根研究. 通常, 美国自然科学基金会支持的是基础性的研究, 不关心课程的发展. 2000年之后, 课程开始受到教育部两个倾向的影响: 第一, 强调教育研究的方法. 在课程比较和评价中, 坚持采用所谓"黄金标准"的随机控制试验法; 第二, 要求执行联邦政府"不让一个孩子掉队 (No Child Left Behind)"的法令. 这在某种程度上限制了美国各州的课程自主权.

1.3 本地自主而非中央统一

美国的课程发展是"分权自主"的. 支持数学教育研究的经费主要来自两大联邦机构, 即美国自然科学基金会和国家教育部. 相比而言, 民间基金会的资助很少. 在美国没有统一的国家课程目标. 事实上, 统一的观念会伤害美国各州自治的政治传统. 因此, 制订教育目标、课程标准的权力还是归各州所有. 在大家看来, 出版社一定会开发和州标准相一致的教科书, 市场也会迫使他们不断提高书的质量, 而且, 他们出版的教科书涵盖了小学和初中各个年级 (从幼儿园到八年级). 因此, 大多数的学区都会购买和本州标准相一致的教科书.

1.4 趋于同质

尽管课程的自主权赋予了各州, 但是全美学区在课程的选择上还是具有相当的趋同性. 美国三大州加利福尼亚、德克萨斯和纽约州的人口占了全美的四分之一. 这些州都采取了"遴选教科书"的方法: 首先由州公布课程指导方案, 然后成立委员会决定哪些教科书是符合课程方案的. 在遴选教科书的州内, 学区只有购买州推荐的课程资料, 才能得到经费的补贴. 因为教科书都很昂贵, 所以几乎没有学区愿意购买未被州推荐的课程资料. 可以理解, 任何一个追求商业利润的出版社都不会放弃这三大州的教科书市场. 于是, 他们开发的教科书迎合了加利福尼亚、德克萨斯和纽约州的三个课程指导方案. 这些教科

---

*编译者按: 原文是美国加利福尼亚大学伯克利分校的A. H. Schoenfeld教授2008年发表在ZDM — The International Journal on Mathematics Education, 题为Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics 的文章. 2008年, 时在新加坡国立教育学院的范良火教授推荐笔者阅读此文, 感受颇深. 华东师范大学数学系的研究生帮我翻译了初稿. 2011年, 征得Schoenfeld教授同意以及Springer的授权, 把原文译成中文. 在此向以上所有帮助我的人一并表示感谢. 由于原文较长, 省略了部分内容, 希望不影响读者的阅读. 其中一切谬误, 均归笔者. 同时也建议有兴趣的读者进一步阅读原文.

书在全美赢得了广阔的市场. 因此, 除了"改革导向"的课程资料之外, 学生手中的东西几乎没有什么变化. 再加上, 受到"不让任何一个孩子掉队"行动计划的影响, "高风险考试(high stakes testing)"导致了某些州直接采取技能导向的评价方式. 这是一个普遍的现象, 不仅仅是美国的教师喜欢应试教学. 因此, 在美国, 当前存在课程变窄、强调技能而不是概念和问题解决的压力.

2. 研究与理论

2.1 1970–1989的研究

到1989年为止, 问题解决的研究已经取得了许多成果. 比如, 细致地刻画了学生使用波利亚问题解决的启发式策略; 把一般意义的启发式策略分解为更加具体的策略; 通过恰当的指导, 教会学生如何使用这些策略; 证实了元认知, 尤其是自我监控和自我调节在问题解决中的作用, 以及信念对形成问题解决行为的影响; 发现了学生学校内外的数学经验是影响他们信念和实践的主要因素.

尽管在这一阶段问题解决的研究已经取得了重要的进展, 但同时也留下了一些尚未解决的重大问题. 比如, 在实践层面, 如何采用直接实验的方法, 确定学生学会各种问题解决策略所需要的练习数量和类型. 迄今为止, 在理论层面, 所有的研究也只是解释了什么是问题解决中的重要环节, 但是, 从来没有理清"解题者到底是如何选择, 为什么要这样选择"的问题. 事实上, 要完成这些工作是非常艰巨的, 已经远远超出了那个时代研究者的能力.

其实, 问题解决的研究早在90年代初开始就鲜有人涉足了. 一方面可能是太困难, 再加上枯燥乏味; 另一方面, 也可能是学术上的偏见: 认为从事实践研究, 没有多大学术价值, 更何况已有人作出了重要的理论贡献. Lester曾坦言, 在研究中也同样存在追逐时尚的现象. 正如问题解决的研究曾经风靡80年代那样, 社会文化的研究逐渐开始成为90年代的热潮.

2.2 1990迄今的研究

虽然问题解决的研究已经遭受了冷落, 但这并不意味着就没有任何进展, 它只不过是以另一种不同的方式在继续. 80年代问题解决的研究对全美数学教师理事会制定《学校数学课程和评价标准》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 以下简称《标准》)产生了深远的影响. 《标准》强调问题解决、推理、数学联结和数学交流, 并把它们作为重要的教学目标. 于是, 研究者开始尝试教学改革, 采用设计实验的方法探究教学的本质以及背后潜在的理论. 设计实验的通常做法是改变教学的内容或者教学的方法, 试图促进学生概念性的理解. 不过, 设计实验一般并不直接指向问题解决.

课堂学习环境的研究要求发展新的分析工具和框架. 特别是, 倾向于改革和《标准》的课堂学习环境的研究, 尽管并不直接关注问题解决, 但是把数学看成是意义生成(sense-making)的活动. 从90年代一直到现在, 研究者已经形成了一系列分析学习环境、学生与环境互动的技术和理念.

2.2.1 将数学看作意义生成的活动

Lampert 在《问题的教学和教学的问题》(Teaching Problems and the Problem of Teaching)一书中, 提出了五年级学年教学目标, 同时又提出了每节课, 甚至每个教学片段的具体教学目标. 这些目标旨在促进学生概念性的理解、问题解决、自主学习以及个性的发展. Lampert还提供了实施这些教学目标的具体办法. 显然, Lampert在教学中把数学当作了一种意义生成的活动, 这种思想本质上是源于以前问题解决的研究. 通过对"传统"(强调技能)教学和基于标准教学的比较研究, 得出了一致的结论: 在技能发展上, "改革"的课程和"传统"的课程对学生的影响没有差别, 但是在促进学生概念理解、实际应用以及问题解决诸多方面, 前者具有明显的优势.

2.2.2 交流的环境

在这个阶段, 一些研究开始探索形成积极课堂环境的机制, 也就是那些融入了改革理念的课堂. 这些研究关注课堂交流的模式, 探索推动或阻碍学生意义生成的互动方式. 这时候也出现了一些重要的观点, 这些观点为探索课堂实践提供了重要的理论支持. 比如, 社会数学规范(sociomathematical norms)和责任结构(accountability structure)的观点. 社会数学规范的观点是由Cobb和Yackel提出来的, 用于分析数学课堂中"分享数学的行为(taken-as-shared mathematics behavior)"特征.

2.2.3 责任结构

学生对数学的责任是: 论据充分, 推理严谨, 符合数学解决问题的规范; 学生对其他同学的责任是: 虚心接受他人的观点; 学生对教师的责任是: 既把教师看作传统意义的权威, 又把教师视为数学课堂的主要组织者和参与其中的一个成员.

2.2.4 课堂文化

前面谈到的都和课堂中的意义生成有关. Engle和Conant在回顾了有关"科学与数学学科中意义生成的课堂教学"研究之后, 认为积极的学习环境之间具有高度的一致性. 这些共同的特点是: 第一, 问题化. 鼓励学生尝试值得思考的问题; 第二, 自主权. 赋予学生提出这些问题的权力; 第三, 责任. 个人的思考要向他人负责, 对学科规范负责; 第四, 资源. 给学生提供丰富的资源完成上述任务.

这样的课堂环境事实上是少有的, 因为在实施的过程中, 对教师而言, 这是一种挑战. 但这一定是一个重要的里程碑.

那么到此时为止, 前面提到的两个尚未解决的问题到底解决得如何了呢? 实践层面的工作, 还是无人问津. 正如前面所述, 这种应用性的研究对研究者没有多大的吸引力. 在作者看来, 这是令人遗憾的. 其实, 探究学生问题解决的策略是很有意义的工作, 可以促进教学的改革, 这是一项工程, 而不仅仅是纸上谈兵. 最不幸的是, 没有任何激励机制, 鼓励人们从事这项工作. 理论层面的一个重要挑战是要从结构性的描述(哪些因素影响问题解决)转向理论性的描述, 即解释人们在问题解决的过程中是如何作出决策的.

3. 课程

3.1 钟摆现象

在过去的半个世纪, 美国的数学课程就像钟摆一样在概念理解和技能掌握之间来回摆动. 50年代, "传统"课程占统治地位. 幼儿园到8年级学习数学, 9年级学习"代数1", 10年级学习"代数2" (或三角学), 12年级学习"微积分基础". 到了80年代～90年代, 在有些州, 9年级以后数学作为选修课程, 每年都有一半的学生不选数学. "传统"课程尽管有概念作为基础, 但是大多是程序性的知识, 教师教给学生许多解题的套路, 然后学生通过反复练习, 掌握相关的技能.

美国数学课程, 除了在意识到国家处在危机的时期外, 一直都不受重视. 40年代, 由于军队士兵数学知识的过于缺乏, 部队不得不强化培训他们的算术知识, 这几乎成了众人皆知的丑闻. 海军曾公开抱怨官兵的数学太差, 然而这一抱怨没有引起课程改革.

1957年, 苏联发射人造地球卫星, 震惊了美国科技界. 美国人看到自己的军事和科技已经落后于苏联, 这激发了美国数学界和科技界共同致力于数学和科学课程的改革. 在数学上, 直接导致了"新数运动". "新数运动"被认为是一场课程灾难, 结果遭到了强烈的反对, "回到基础去"把新数学赶出了教室. 于是70年代, 基础知识又统治了美国课程.

3.2 问题解决有名无实的80年代

1980年, 全美数学教师理事会 (National Council of Teachers of Mathematics) 发表了题为《行动纲领: 80年代学校数学建议》(An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s) 的手册, 评述了60年代～70年代的学校数学教学状况: 60年代的数学课程和教学都发生了相当大的变化. 尽管公众的注意力只是集中在教学内容的变革上, 但是20年后, 我们意识到这种变革影响深远. 70年代, 公众的注意力发生了转向, 开始追求考试的分数. 学校对此作出了不同程度的迎合, 但是对未来缺乏理性的思考.

全美数学教师理事会对此提出的口号是"问题解决". 《行动纲领》一共提出了8条建议, 第一条就是"问题解决必须成为80年代学校数学的中心", 随后又详细地阐述了这个观点: (1) 建立以问题解决为核心的数学课程; (2) 扩展问题解决的表现形式; (3) 营造问题解决的课堂环境; (4) 开发适合各个年级学生学习问题解决的教学资料; (5) 实施让每个年级学生都能体会到问题解决的数学课程.

然而在80年代, 上面提到的五条建议都被忽视了. "问题解决"在当时确实是一个时尚的口号, 但在大多数课堂里被歪曲了. 贴了"问题解决"标签的新版教科书却只是对旧版本的略许修改, 尽管援引了波利亚《怎样解题》(How to Solve It)中的4个步骤(理解问题, 制定计划, 实施计划, 回顾), 但是原先的内容几乎一成不变.

"问题解决"也就变成了解决一到两步常规文字题的代号. 简而言之, 80年代美国数学课堂里的"问题解决"就是解决(简单)文字题. 这主要有三个原因: 第一, 当时问题解决的研究还刚刚起步, 很少有人通过研究指导课程的发展; 第二, 教师总是保守的, 重大的变革总会遭到强烈的反对; 第三, 出版行业的利益趋势, 阻碍了变革.

3.3 80年代的政治背景

80年代, 国家的竞争又一次成为主题, 这次是经济, 而不是军事. 70年代~ 80年代, 美国经济衰退, 日本迅速崛起. 全美卓越教育委员会(National Commission on Excellence in Education)在《国家处在危机中: 教育改革势在必行》(A Nation at Risk: The Imperative for Educational Reform)中赫然写道: "我们的国家正处在危机中. 我们曾经无人匹敌的商业、工业和科技都正在被全世界的对手超越…… 我们社会的教育基础正在被一种追求平庸的尘嚣直上的潮流所侵蚀, 威胁着我们国家和公众的未来……

课程改革又一次被推到了风口浪尖之上. 美国国家研究委员会(US National Research Council)成立了数学科学教育部(Mathematics Science Education Board)专门负责数学教育事务, 而不再像以往那样仅仅是事后"保持三分钟热度". 1989年, 数学科学教育部发表了一个重要的报告《人人算数》(Everybody Counts), 呼吁公众重视美国数学教育改革. 该报告提出数学教育的改革应该是一个多维度的改革, 包括数学教学目标(普及教育和英才教育)、民族数学教育和数学内容的改革.

3.4 新目标

《人人算数》发表不久, 全美数学教师理事会随即发表了《学校数学课程和评价标准》, 把问题解决的研究融入了《标准》的教学目标(也就是"标准"). 其中前四条标准(作为问题解决的数学, 作为交流的数学, 作为推理的数学, 数学联结)关注了数学的过程, 而数学过程曾经是十多年数学问题解决研究的核心. 《标准》提出了五项总体目标: (1)学习有价值的数学; (2)树立学习数学的自信心; (3)会提出问题、解决问题; (4)学会数学交流; (5)学会数学逻辑思维. 这就意味着, 学生必须积累丰富的经验, 体会数学的价值, 养成数学思维的习惯, 了解数学在人类活动中的重要作用; 这也意味着, 教师必须鼓励学生去探索, 去猜想, 出错再纠错, 逐步培养他们解决复杂问题的自信心. 学生不仅要学会阅读、书写、讨论数学内容, 而且还要学会猜想、检验和证明数学结论.

3.5 新课程

美国自然科学基金会意识到仅仅依靠商业出版《标准》的课程是行不通的. 从1989年到1991年, 基金会出台了一系列资助开发《标准》课程的计划, 并且为编写小学、初中、高中三个学段的数学课程提供了资助. 事实上, 整个过程需要花费大量的时间. 通常, 想要编写一个N年的课程, 就需要花费N年的时间. 当然, 这还是第一个版本. 这些事情直到90年代中期才完成, 不久以后又开始编写第二个版本. 到2000年左右, 才有了第一批完整经历了小学、初中、高中新课程的学生"粉墨登场". 接着, 评价新课程的数据也陆续出现了.

3.6 课程评价

对《标准》课程最全面的评价来自Senk和Thompson领导的一系列研究, 他们评价了自然科学基金会资助的所有新课程. 其中, Putnam对4个小学课程的评价结果进行了概括: 课程的焦点都集中在用不同的方法帮助学生发展概念性知识和有用的数学知识, 减少了学生在程序性知识上的学习. 学习新课程和学习传统课程的学生在数学考试中的成绩大抵相同. 但是, 在概念性理解和运用数学解决问题的评价中, 学习新课程的学生做得更好. Chappell总结了初中课程的评价结果: 《标准》的课程有效地促进了学生的概念性理解和程序性理解, 有利于学生形成深层次的数学思维方式. Swafford在高中课程的评价中得出了一致的结论: 几乎所有的证据表明改革后的课程有效地提高了学生的成绩. 学习新课程的学生不仅可以学好传统内容, 而且还可以提高其他技能和理解能力. 总的来说, 《标准》课程的评价结果是相当一致的. 在技能测试中, 学习《标准》课程的学生与学习传统课程的学生在统计上没有显著的差异. 在概念性理解和问题解决的测试中, 学习《标准》课程的学生明显要比学习传统课程的学生表现得出色.

作为对上面研究的一个补充, ARC (Alter-

natives for Rebuilding Curricula) 中心主持了一个大型的比较研究, 学生样本来自伊利诺伊、马萨诸塞和华盛顿州. 这项研究最重要的发现是, 在改革课程中学习的学生要比对照组表现得出色. 对于不同的测试、不同的年级、不同的地域, 不论出身、种族、宗教信仰的区别, 这个结论总是成立的.

3.7 问题解决的影响

《标准》课程中的许多观点来自问题解决的研究, 主要是受到了80年代~90年代问题解决研究的影响. 不过, 这些课程还没有明确指出如何使用启发式的问题解决策略, 这正如前面所提到的那样, 在这个领域当时还缺少深入的研究, 因此也就无法体现在课程中. 《标准》课程强调了学生应当在情境中发展概念性的理解, 掌握解决问题所必须的技能; 同时, 鼓励学生在解决"问题" (区别于练习题) 的过程中, 使用非常规的方法, 学会数学推理, 进行数学交流, 在不同的数学知识之间形成联结.

3.8 当前的国家政策

在美国, 研究和政策完全是两码事. 90年代课程改革的反对派在加利福尼亚州发动了数学战争, 并且取得了胜利. 他们最终获得了州教学大纲和教科书遴选的控制权. 结果是, 加利福尼亚州的课程标准(以及由此形成的州教科书)强调了技能掌握的教学, 而不是注重理解的教学. 更为严重的是, 现在已经成为席卷全美的趋势. 现在, 不仅反对派遍布全美, 而且许多在数学战争中表现活跃的反对派人士已经当选为联邦政府的顾问. "不让一个孩子掉队"的法令要求各州实施考试, 其中大部分测试是技能性的. 美国教育部已经下定决心要夯实基础. 在总统的命令下, 教育部在2006年成立了国家数学顾问委员会, 向总统和教育部长提供数学教育政策咨询. 这个顾问团的主要成员是传统主义者, 因此很可能他们的报告更倾向于技能掌握的教学, 而不是注重理解的教学. 总之, 目前是反对派占了主导地位.

全美数学教师理事会试图努力阻止这种趋势, 于是在2006年发表了《幼儿园到8年级的数学课程焦点: 追求连贯性》(Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence, 下面简称《焦点》), 明确指出《焦点》是对《标准》的传承.

笔者认为全美数学教师理事会发表《焦点》无异于搬起石头砸自己的脚. 不过, 《焦点》的出台也是事出有因: 许多州制订标准时, 只是罗列了要求学生掌握的技能, 并没有关注"核心思想" (big ideas). 事实上, 《焦点》的出台表明了一种无奈. 加利福尼亚州2006年版的数学教学大纲和1992年版的大纲 (1985年版的加利福尼亚州数学教学大纲是1989年全美数学教师理事会《标准》的前驱. 随后, 1992年版的教学大纲在改革之路上又迈进了一大步, 强调了"数学的力量"和学生的合作, 淡化了传统技能和算法的训练) 相比已经发生了许多变化, 尽管大纲中还有很多关于问题解决的解释, 但是这些解释已经完全曲解了原先《标准》中的界定. 比如在"代数1"中只是对技能作了详细的解释和具体的要求, 不再对问题解决、推理、数学交流、数学知识的联结作任何要求. 遗憾的是, 《焦点》的内容和加利福尼亚州的大纲是如出一辙的. 所以不难理解为什么传统主义者会如此欢呼雀跃, 全美数学教师理事会全然没有意识到他们的做法正合反对派的心意.

公众在评论《焦点》时, 对全美数学教师理事会进行了极力的批判. 2006年9月18号的纽约时报这样评论: 80年代末, 一个臭名昭著的标准让许多学校摒弃了传统的数学教学. 这个有时可以戏称为"模糊数学"(fuzzy math) 的新标准, 要求学生在还没有学习乘除法的情况下, 随意解决数学问题, 其结果是可想而知的, 学生无法掌握高水平的数学与科学知识. 新的数学课程每年都要教许多新的内容, 但是通俗地说, 只有"一英里宽, 一英寸厚". 许多人把这个不幸归罪于一个具有影响力的组织——全美数学教师理事会. 许多学区曾经响应其号召, 毅然放弃老套的传统教学. 然而, 上星期, 该协会又改变了原来的观点, 强调发展各个年级学生的基本技能. 学生将又一次回到基础, 学习加、减、乘、除等基本技能, 为7年级学习代数作好准备.

事实上, 上面提及的美国课程是"一英里宽, 一英寸厚"的说法来自 TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 对传统数学课程的评价, 因此这个说法并不确切. 但

(下转第3-33页)

日本初中立体几何内容及教学实践

010022 内蒙古师范大学数学科学学院 王月英 代 钦

一、前言

日本数学教育改革以稳健著称，重视各学习阶段的知识的衔接性，就立体几何内容的设置而言，日本小学、初中和高中的数学教科书中都有立体几何内容，内容安排以螺旋上升形式，这与我国的情况不同.

在国内半年专门研读日本初中数学教科书立体几何内容之后，笔者专程到日本拜访日本筑波大学教授矶田正美先生，并参加其讨论班，于2010年12月到日本茨城县筑波市立并木中学观看了初中一年级立体几何课.

本文阐述了日本现行初中数学教科书中设置立体几何内容的理念、内容、教育价值，并适当地与中国初中数学教科书进行比较，借助日本初中立体几何课堂教学实际进一步论述了在初中数学教科书中设置立体几何内容的重要意义.

目前，日本数学教育面临着实际生活环境、高考、就业、有限的数学课时、数学教科书的改编等多重问题，而这些问题在某种程度上先拿数学教科书几何内容的删减开刀. 即使在这种情形下日本初中数学教科书中仍然保留了一定的立体几何内容.

二、现行日本初中立体几何内容

(一) 2010年新改编的日本初中数学教科书中的立体几何内容

日本以更好地让学生掌握基础技能知识，培养思考能力、判断能力、表现能力为发展目的. 对应学生的身心发展，由小学图形初步认识的基础到初中空间图形 —— 立体几何内容之间螺旋上升地编写了初中数学教科书中的立体几何内容.

下面列出的是2010年新改编的初中立体几何内容(见表1).

表1 初中立体几何内容的改编部分

初中一年级	球的表面积和体积 ⟵ 新高中
	图形的对称性(轴对称、点对称) ⟶ 小学六年级
	角锥和圆锥的体积 ⟶ 小学六年级
	平移对称旋转运动 ⟵ 新增
初中二年级	圆周角和中心角的关系 ⟶ 初中三年级
初中三年级	相似图形的面积和体积 ⟵ 高中
	圆心角和中心角的关系 ⟵ 初中二年级、一部分高中

(二) 日本初中数学教科书中的立体几何内容

现行日本初中数学教科书中的几何部分内容与我国不同. 除了平面几何外，还有空间点、直线、面相互之间的各种位置关系及关于平面图形运动(平移、对称、旋转)之后所形成的各种基本空间图形. 日本初中数学教科书中的立体几何内容关于判断、解决立体几何问题的内容不多，而是以丰富初中学生空间图形认识为主. 共同去体验一下日本初中数学立体几何课.

1. 教师首先让学生自己去完成与新内容相关的题. (一节课50分钟 9:40—10:30) 从开始上课到讲新内容之间大约15分钟内做与上节课所学知识相关的复习题与练习题.

(9:56) 例　求立方体和圆柱体的表面积.

用漆刷下面的立方体A和圆柱体B的表面，那么刷哪个柱体用漆量要多一些呢?

(10:06) 老师: 哪个用漆量多?

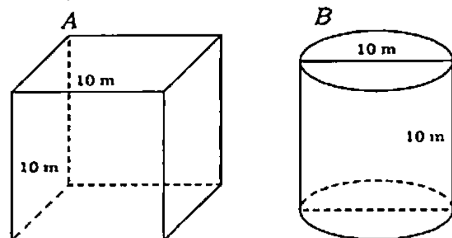


图 1

有的学生喊A用的多，还有的学生喊B用的多.

老师: 为什么A用的多? 为什么B用的多?

学生1: A的面积是10×10; B的面积是$10\times\pi$.

学生2: A的面多; B的面少.

回答用漆量A要比B多的学生占多数. 这时老师提示了如果把两个柱体展开哪个大? 学生们非常积极自由地讨论起来.

学生3: B的面积大(也说不出为什么, 就觉得B的面积大).

学生4: 上讲台讲解自己解题的思路,

A的面积是$10\times10=100(\mathrm{m}^2)$, $100\times6=600(\mathrm{m}^2)$;

B的面积是$5\times5\times\pi\times2=50\pi(\mathrm{m}^2)$, $10\times\pi=10\pi(\mathrm{m})$, $10\pi\times10=100\pi(\mathrm{m}^2)$, $50\pi+100\pi=150\pi(\mathrm{m}^2)$, $150\times3.14=471(\mathrm{m}^2)$.

答: A的表面要比B的表面大, 所以刷立方体A用漆量比刷圆柱体B用漆量要多.

(10:16) 老师: 还有别的解法吗?

学生: 从底面看边长是10m的正方形比直径是10m的圆多四个角, 所以刷立方体用漆量要比刷圆柱体用的漆量多.

老师: 展开两个立方体是什么样的形状呢?

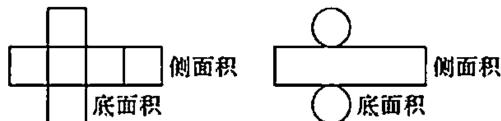


图 2

(10:25) 内容整理:

侧面积: 不只是一个侧面积而是所有的侧面积之和;

底面积: 上底面积和下底面积之和;

表面积: 底面积和侧面积之和.

(10:28) 作业: 187页的第1题和第3题.

2. 日本初中数学教科书中的"数学的森林"中特别设置了适当的结合数学史知识的立体几何内容——关于空间位置的表现方法、立体的表现法、透视法等内容.

如图3, 正6边形上加3个线段后得到右边的图形. 这样加上3个线段之后从视觉上给人们呈现的是一种立方体图形. 把所见的物体形状和景色在平面上表现出来的方法之一远近透视法也是利用立体几何解决的. 如达芬奇的《最后的晚餐》就是利用数学的空间位置远近、透视方法完成的.

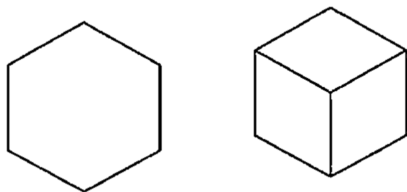


图 3

(三) 不仅日本初中数学教科书有立体几何内容, 小学数学教科书"图形初步认识"中也有立体几何内容

如日本小学三年级数学教科书中有立体几何内容: 箱子的展开图(如图4)中每个面是什么形状?

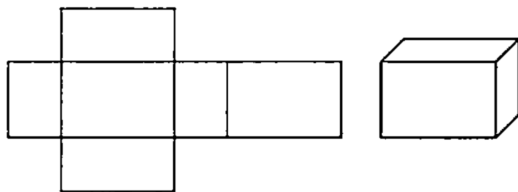


图 4

日本小学教科书中也穿插了空间图形的初步认识——立体几何内容. 这些内容能更自然地衔接小学和初中几何知识. 在重复学习的基础上, 从不同的新的视角培养学生重构能力. 不会给初入中学的学生陌生感和跳跃感及过度的抽象感, 学生可以轻松愉快地学好数学.

三、日本初中立体几何内容的教育价值

通过平面图形的移动、空间图形的展开等操作, 从图形本质观察物体, 培养学生直观能力、洞察力及理论性地考察图形性质的能力, 提高三维世界——空间物体的二维——平面表现能力.

从平面几何到立体几何内容的连续性和逻辑性, 提高学生整体思维能力. 促进更有效地实际操作能力, 即实际运用工具的能力.

通过考察测量等活动, 重视图形性质、定理等在具体情境中的活用. 将实际的物体数学性地抽象化, 探究平面图形扩充延伸到空间图形, 提高学生对结构数学的认识和空间想象能力.

保证在预想空间图形的性质与抽象出的空间图形关系的正确性和一般性的基础上, 提高理论性的推理论证意识, 从而能更深层次地观察研究. 培养学生由学习空间物体的空间位置关系、定义、组织发掘空间图形潜在的新的位置关系的能力——创新能力.

立体几何学习不仅限于数学领域的学习, 对

(下转第3-41页)

关于线性回归模型的显著性检验

200040　上海市静安区教育学院　任升录

一、问题的提出

已经出版使用的几套普通高中课程标准实验教科书，在选修教材中都介绍了用两个变量的相关系数进行一元线性回归模型显著性的检验．例如人教版和苏教版将这部分内容放在数学选修2-3统计案例中[1][2]，其中人教版还用较多的篇幅叙述"残差分析"．

在一元线性回归模型$y=a+bx+\varepsilon$(其中ε是y与$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$之间的误差，$\hat{a}$、$\hat{b}$、$\hat{y}$分别是a、b、y的估计值，本文同类记号表示意义相同)中，通常ε为随机变量，称为随机误差．$b=0$说明x值的变化对y没有影响，反之，$b\neq 0$说明两个变量之间存在线性关系，因此线性回归的显著性检验需要对未知数x的系数b(回归系数)进行显著性检验，应是检验自变量x的系数是否等于零，目前大学数理统计教材也都是这么处理的．为什么能够通过对相关系数进行显著性检验，同样可以刻画模型的合理性呢？本文探讨两者之间的一致性．

二、回归系数的显著性检验

为了说明这个问题，我们回顾大学数理统计教材检验假设$H_0: b=0$是否成立的方法[4]．

我们知道，样本观察值$y_1, y_2, \cdots, y_n$之间的差异，是由两个方面的原因引起的：(1)自变量x取值的不同；(2)其他因素(包括试验误差)的影响．为了检验这两方面的影响哪一个是主要的，首先就必须把它们所引起的差异，从总的偏差y中分解出来，即将x对y的线性影响与随机波动引起的误差分开，即对总偏差平方和$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$进行分解($\overline{y}$为样本平均值)．

因为$(y_i-\overline{y})^2=[(y_i-\hat{y_i})+(\hat{y_i}-\overline{y})]^2=(y_i-\hat{y_i})^2+2(y_i-\hat{y_i})(\hat{y_i}-\overline{y})+(\hat{y_i}-\overline{y})^2$，

其中$\hat{y_i}=\hat{a}+\hat{b}x_i$．

$(\hat{y_i}-\overline{y})(y_i-\hat{y_i})$

$=\hat{b}(x_i-\overline{x})\left(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a}\right)$，

由$\overline{y}=\hat{a}+\hat{b}\overline{x}$，得$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，

所以$(\hat{y_i}-\overline{y})(y_i-\hat{y_i})$

$=\hat{b}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})-\hat{b}^2(x_i-\overline{x})^2$．

回归系数$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

(见文[1]第81页，文[2]第95页)，

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\overline{y})(y_i-\hat{y_i})$

$=\hat{b}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})-\hat{b}^2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

$=0$，

因此$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\overline{y})^2$，

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y_i}-\overline{y})^2$的大小反映了$\hat{y_1}, \hat{y_2}, \cdots, \hat{y_n}$相对于$\overline{y}$的离散程度．这一离散性是由于在回归直线上它们所对应的横坐标$x_1, x_2, \cdots, x_n$的变化引起的，并且通过x对y的线性影响表现出来，它的大小(在与误差相比的意义下)反映了自变量x的重要程度，称它为回归平方和，记为U．U在总偏差平方和中的比重越大，回归效果就越好，而U值越小则回归效果就越差．

实际观察值y_i与回归直线上相应点纵坐标$\hat{y_i}$的差$y_i-\hat{y_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$称为残差，$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y_i})^2$称为残差平方和，记为$Q$．$Q$完全由随机项$\varepsilon$引起的，它的大小反映了试验误差及其他因素(如$x$对$y$的非线性影响)对试验结果的影响．$Q$的相对值越小则预测精度越高，否则精度就低．在假设$H_0$成立的条件下，$Q$的相对值应较大，$\dfrac{U}{Q}$的值应比较小，统计学家选取检验统计量

$F=\frac{(n-2)U}{Q}$ 来体现x对y的线性影响的相对大小, 如果F值相当大, 则表明x对y的线性影响较大, 就可以认为x与y之间有线性关系; 反之, 若F的值较小, 则没有理由认为x与y之间有线性关系. 样本容量n不同, 对应的F显著性临界值不同, F值的大小可以通过查表获得. 这一检验方法称为F检验.

三、两种检验方法的内在联系

我们知道具有线性关系的两个变量y和x的观察值之间具有较高相关关系, 并且x的值由小变大时, y的值也在由小变大, 这种相关为正相关; 反之, 如果一个变量的值由小变大时, 另一个变量的值由大变小, 这种相关为负相关. 已知两个变量x和y的一组观察值为

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

则它们之间的相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}.$$

当$|r|$或r^2较大时, 说明y与x之间具有较高线性关系. 用$|r|$或r^2检验两个变量之间是否具有线性关系, 比较直观, 高中生易于理解, 这与F检验方法有何内在联系呢?

为了弄清楚这个问题, 我们一起来探究相关系数r与回归平方和U、残差平方和Q之间的等量关系. 前面我们已经证明

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2,$$

我们再来探究相关系数r与回归平方和U、残差平方和Q之间的等量关系.

因为相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}},$$

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}.$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\hat{b}^2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

$$=\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$=r^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ (该式表明了相关系数与回归系数之间的等量关系),

所以 $r^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$ (由此式可知$|r|\leqslant 1$).

又 $U=\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$, $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$,

所以 $r^2=\frac{U}{U+Q}=1-\frac{Q}{U+Q}$

$$=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2},$$

而 $F=\frac{(n-2)U}{Q}$,

所以 $F=\frac{(n-2)r^2}{1-r^2}$ 或 $r^2=\frac{F}{n-2+F}$.

可见, r^2或$|r|$是关于F的递增函数. 当$|r|=1$时, $Q=0$, 这时可以认为y与x有着完全的线性关系; 当$|r|=0$时, $U=0$, 这时可以认为y与x无线性关系; 当$0<|r|<1$时, 可以认为y与x有一定程度的线性关系, 但并非完全的线性关系, 其显著性由$|r|$的大小而定, 当$|r|$较大时拒绝假设$H_0:b=0$. $|r|$的临界值可按$r^2=\frac{F}{n-2+F}$由F的临界值计算. 至此可知, 在一元线性回归模型检验中, 相关系数检验与检验未知数x的系数b是否为零的F检验, 结果是一致的.

参考文献

[1] 刘绍学主编. 普通高中课程标准实验教科书选修2-3数学[M]. 北京: 人民教育出版社, 2006年12月第2版.

[2] 单墫主编. 普通高中课程标准实验教科书选修2-3数学[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2006年6月.

[3] 袁震东主编. 高级中学课本数学(高三拓展Ⅱ理科)[M]. 上海: 上海教育出版社, 2008年8月.

[4] 陈家鼎等. 数理统计学讲义(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006年5月.

上教版与人教版教材中函数概念引入的比较

200086　上海市华东师大一附中实验中学　刘海涛

初中数学教学中，概念获得的方式有两种，一种以概念形成方式获得，另一种是以概念同化方式获得.

由于初中生的年龄以及认知水平特点，学生的数学认知结构比较简单而具体，数学知识有限，在学习新的数学知识时，能作为同化新知识的已有基本知识比较少或没有，因此在初中教学中，大部分概念是以概念形成方式进行教学. 所谓概念形成是指人们对同类事物中若干不同例子进行感知、分析、比较和抽象，以归纳方式概括出这类事物的本质属性，从而获得概念的方式. 函数概念是初中数学教学的重点和难点之一，是常量数学到变量数学的转折点，是学生学习变量数学的起点，是初中数学的一个核心概念. 因和学生已有的知识不能直接相联系，因此教材在函数概念的引入上都是利用概念形成的方式进行. 本文就上教版与人教版教材中初中数学函数概念的引入进行一些初步的比较分析.

一、上教版与人教版教材中函数概念形成例子的比较

两本教材在函数概念形成时所举的例子不同，上教版举了两个例子形成函数概念，这两个例子是:

1. 地球上的赤道是一个大圆，半径长$r_0 \approx 6.378\times10^6$(米). 设想有一个飞行器环绕赤道飞行一周，其轨道是与赤道在同一平面且同圆心的圆E. 如果圆E的周长比赤道的周长多a米，那么圆E的半径r是多少米?

2. 一辆汽车行驶在国道上，汽车油箱里原有汽油120升，每行驶10千米耗油2升.

(1) 填表:

汽车行驶的路程	100千米	150千米	200千米	250千米
油箱里剩余的油量				

(2) 在汽车行驶过程中，汽车行驶的路程与油箱里剩余的油量都是变量吗?

(3) 设汽车行驶的路程为x千米，油箱里剩余的油量为y升，那么y与x之间是否存在确定的依赖关系?

人教版举了五个例子形成函数概念，这五个例子是:

1. 汽车以60千米/时的速度匀速行驶，行驶里程为s千米，行驶时间为t小时，先填下表，然后再用含t的式子表示s.

t/时	1	2	3	4	5
s/千米					

2. 每张电影票的售价为10元，如果早场售出150张票，午场售出205张票，晚场售出310张票，三场电影的票房收入各多少元? 设一场电影售出x张票，票房收入为y元，怎样用含x的式子表示y?

3. 在一根弹簧的下端悬挂重物，改变并记录重物的质量，观察并记录弹簧长度的变化，探索它们的变化规律，如果弹簧原长10cm，每1kg重物使弹簧伸长0.5cm，设重物质量为$m$kg，受力后的弹簧长度为$l$cm，怎样用含m的式子表示l?

4. 要画一个面积为10cm^{2}的圆. 圆的半径应取多少? 圆的面积为20cm^{2}呢? 怎样用含圆面积S的式子表示圆半径r?

5. 如图1，用10米长的绳子围成长方形，试改变长方形的长度，观察长方形的面积怎样变化. 记录不同长方形的长度值，计算相应长方形的面积值，探索它们的变化规律. 设长方形的长为xm，面积为Sm^2，怎样用含x的式子表示S?

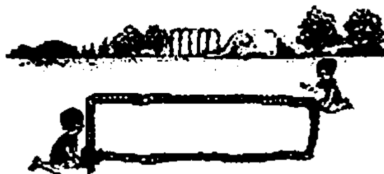


图 1

从例子数量上看，人教版教材在函数概念形

成过程中，举了五个例子；上教版教材举了两个例子. 显然例子数量不同. 从例子的难易程度上比较，上教版的第一个例子对学生空间想象能力的要求比较高，部分学生理解起来会有一定困难；与上教版两个例子相比，人教版的五个例子比较简单，例题背景和学生的直接经验联系比较紧密，学生理解起来比较容易.

二、上教版与人教版教材对例子分析上的比较

上教版教材在分析时，注重用含x的代数式表示y，并指出"变量x与y之间存在确定的依赖关系". 而人教版教材在分析时，更注重两个变量之间的对应关系，并且在几个问题分析后进行小结，总结几个例子的相同点，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应. 然后通过如下两个思考题.

思考1：如图2，是体检时的心电图，其中图上点的横坐标x表示时间，纵坐标y表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量. 在心电图中，对于x的每一个确定的值，y都有唯一确定的对应值吗？



图 2

思考2：下面的我国人口数统计表中，年份与人口数可以记作两个变量x与y，对于表中每一个确定的年份(x)，都对应着一个确定的人口数(y)吗？

中国人口数统计表

年份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	11.52

变量之间的对应关系也可以用图像或表格表示，用不同的方式揭示两个变量之间对应，进而给出函数定义. 这比上教版教材通过两个例子中变量的依赖关系给出函数概念，能更准确揭示函数概念的本质.

三、上教版与人教版教材中函数概念的比较

上教版初中函数定义：在某个变化过程中有两个变量，设为x和y，如果在变量x的允许取值范围内，变量y随着x的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量y叫做变量x的函数，x叫做自变量.

上教版高中函数定义：在某个变化过程中有两个变量x、y，如果对于x在某个实数集合D内的每一个确定的值，按照某个对应法则f，y都有唯一确定的实数值与它对应，那么y就是x的函数.

人教版初中函数定义：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量x和y，并且对于x的每一个确定值，y都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说x是自变量，y是x的函数.

人教版高中函数定义：设A、B是非空数集，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数$f(x)$和它对应，那么就说$f: A \to B$为从集合A到集合B的一个函数.

上教版教材中函数定义，在初中刻画的是两个变量之间的依赖关系，在高中强调两个集合之间的对应关系. 初中与高中不太一致，初中没有强调"对应"，而到高中再强调，学生容易感到函数概念发生变化了. 而人教版教材中函数概念体现出了初中与高中的一致性，初中就强调了函数概念的本质，只不过到高中把函数概念用集合的语言重新定义一下，但函数概念的本质没有发生变化.

四、对上教版教材的思考和建议

1. 上教版教材考虑到初中生的年龄特点，以及初二学生对比较抽象概念还不容易抓住其本质属性，因此把函数概念的本质刻画成依赖关系，这样或许可以降低学生理解函数概念的难度，但会造成初中(依赖关系)与高中(对应关系)的不一致. 笔者感到将"依赖关系"改为"对应关系"应该也是一种不错的选择.

2. 如果把上教版教材第一个例子中的"设想有一个飞行器环绕赤道飞行一周"一句，改成"我国发射的某一种飞行器(比如神州六号飞船等)"，并给出同心圆的平面图形，可能会更有利于学生理解这个问题：一是可激发学生的民族自豪感和爱国热情；二是可激活学生的求知欲望；三是通过图形可降低学生分析问题的难度.

3. 如果在两个例子之后，上教版教材能增加通过图像表示两个变量之间的关系，以及通过列表表示两个变量之间的关系的例子，然后给出函

(下转封底)

一道课本例题的教学反思及优化设计

636031　四川省巴州区大和初中　李发勇

"教而不思则罔, 思而不教则殆." 虽说"教学永远是一门遗憾的艺术", 但反思是减少这种遗憾的"金科玉律".

反思性教学是以解决教学问题为基本点, 是以追求教学实践合理性为动力, 是强调"学会教学"和"学会学习", 是全面发展教师的过程[1]. 就时间点来讲有课前反思, 课中反思, 课后反思. 就教师而言需有创新的勇气, 纠偏的心理, 要以实践为前提. 经历"反思实践——理性分析——实际验证——重新概括"的螺旋式上升过程, 将反思性教学作为每个教师常态的工作, 那么提高数学课堂教学效益将指日可待. 下面以一道例题的教学反思为例, 谈谈通过反思性教学实现教学优化的相关问题.

例1　华师大版《数学》九年级上《一元二次方程》第29页实际应用题例7: 学生生物小组有一块长32m, 宽20m的矩形试验田, 为了管理方便, 准备沿平行于两边的方向纵、横各开辟一条等宽的小道. 要使种植面积为540 m^2, 小道的宽应是多少?

教材给出的解法: 设道路的宽为xm, 根据题意, 可列出方程

$$20\times 32-20x-32x+x^2=540.$$

整理得$x^2-52x+100=0$.

解得$x_1=50$(不合题意, 舍去), $x_2=2$.

答: 道路宽为2m.

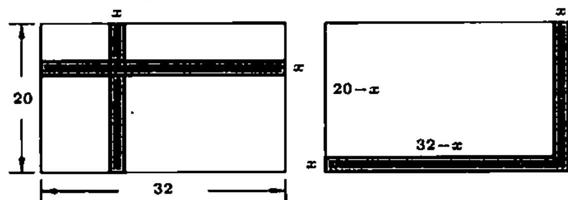


图1　　图2

思考: 如果将道路平移, 会不会改变种植面积的大小呢? 通过平移转化给出的另解: 如图2, 设道路的宽为xm, 根据题意, 可列出方程

$$(20-x)(32-x)=540.$$

解略.

1. 调查与诊断

通过一次调查, 发现能用教材方法求解的学生占40.7%, 能用平移法求解的占23.7%, 用其他方法正确求解的占11.9%, 错误处理成$640-20x-32x-x^2=540$占8.5%, 根本不处理道路交叉部分面积的占6.8%, 不会解的占8.4%, 效果差强人意. 造成这种现象的原因是什么呢?

2. 归因与反思

反思1: 通过教学应使学生能根据量的关系, 列出一元二次方程, 并检验解的合理性, 获得更多运用数学知识分析和解决实际问题的方法和经验, 体会数学的价值. 种植面积540=原矩形面积－两条道路面积. 但两条道路面积和的计算具有抽象性, 按教材处理理性有余, 感性不足, 对于基础比较薄弱的学生会更有空乏之感, 尤其是道路交叉部分面积的加减问题.

反思2: 利用平移的思想把不规则图形转化为规则图形, 是解决问题的关键所在, 这可使复杂问题简单化. 在教学中如何增强学生理解的直观性, 通过所积累的感性经验完成抽象认识, 建立方程模型呢? 笔者作如下教学改进:

3. 以学定教, 重新设计

3.1 "返璞归真"寻解法

新课程要求让学生经历"问题情境——建立模型——求解——解释与应用"的过程, 应用题教学亦当如此. 实际上应用题教学比较重视"建立模型和求解"过程, "问题情境——解释与应用" 环节相对薄弱, 这是造成应用题学习困难的重要原因之一. 虽然应用题自身就是一种"情境", 但学生并不会自发地进入情境、分析情境、理解情境, 最终解决问题.

探究一: 利用部分之和等于整体的关系求解: 如图3, 用于种植的四块面积代数式分别是

ac、bc、ad、bd, 故 $ac+bc+ad+bd=540$, 分解因式得 $ac+bc+ad+bd=(a+b)(c+d)$.

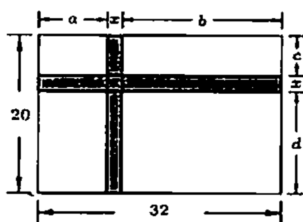


图 3

由题意得 $a+b=32-x$, $c+d=20-x$, 则 $(32-x)(20-x)=540$.

这种方法看起来繁琐, 但因抽象程度不高, 容易被学生接受, 不失为一种对上述两法的合理性解释.

探究二: 将两条道路拼接成矩形呢? 长为 $20+32-x$, 根据题意, 可列出方程: $20\times 32-(20+32-x)x=540$.

两条道路的面积共是多少呢? 是 $32x+(20-x)x$. 故可列出 $32x+(20-x)x=32\times 20-540$.

至此, 通过构建基础解法, 为学生利用整体思想和平移方法解决问题铺平道路. 贝克莱在《人类知识原理》一书中指出, 不费辛苦琢磨, 我们不能获得抽象的概念. 有没有更简便一些的解法呢? 好奇心驱使我们进入课本解法的学习.

探究三: 如果将种植部分平移呢? 画个图形, 试一试. 通过再次转换思路, 使问题解决在方法层面再一次获得提升.

3.2 变式教学, 引导迁移

在数学思考和问题解决中, 进一步延伸平移和化曲为直数学思想的应用, 促进数学本质理解.

变式1: 若将上题中互相垂直的两条等宽的路各变成两条呢?

通过平移将图4(1)变化为图4(2), 列方程:

$$(20-2x)(32-2x)=540.$$

变式2: 若将上题中的道路由直线形的改成直角折线形(道路宽度处处相等)呢?

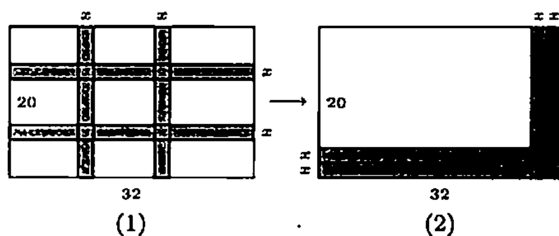


图 4

例2 如图5, 在宽为20m, 长为32m的矩形地面上修筑同样宽的道路(图中阴影部分), 余下的部分种上草坪. 要使草坪的面积为540m^2, 求道路的宽度.

思路导引: 将阴影部分平移, 列方程为

$$(20-x)(32-x)=540.$$

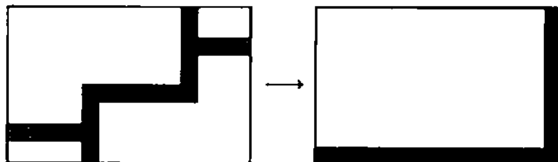


图 5

3.3 自主探究, 拓展运用

若将道路设计改为: 斜线形(与矩形的边不都平行)→曲线(道路宽度处处相等)呢?

例3 某中学为美化校园, 准备在长32m, 宽20m的长方形场地上修筑若干条一样宽的道路, 余下部分作草坪, 设计草坪的总面积仍为540m^2, 请全班学生参与设计. 现选取了几位同学不同于上述的设计方案:

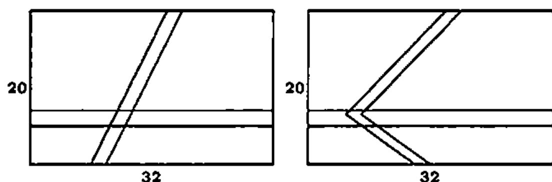


图 6 图 7

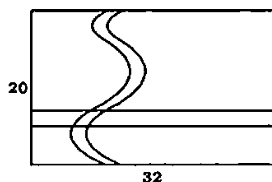


图 8

(1) 甲同学方案: 如图6, 道路由直路改为斜路, 那么道路的宽又是多少?

(2) 乙同学方案: 如图7, 改为折线又如何?

(3) 丙同学方案: 如图8, 改为曲线又如何?

分析: 如图6, 由于两条道路出入口相距相等, 故设为 x, 不妨将东西方向道路下侧向上平移 x 个单位, 再将南北方向道路右侧部分向左平移 x 个单位, 得边长分别为 $32-x$ 和 $20-x$ 的新矩形, 如图9, 则

$$(32-x)(20-x)=540.$$

方案(2)、(3)呢? 类似可得同样的结果.

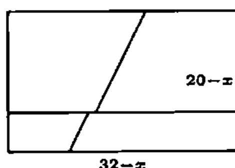


图 9

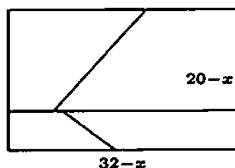


图 10

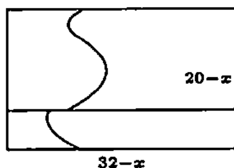


图 11

3.4 *思考、质疑、猜想、重构*

思考1: 图6中两道路交叉部分是什么图形呢? 有人认为交叉部分有两组对边分别平行, 所以是平行四边形. 但也有人根据道路等宽的要求, 坚持认为交叉部分图形是菱形. 但交叉部分图形形状的问题谁也没有说服对方, 悬而未决, 都认为根据两次平移作图, 会出现一个边长为x的正方形, 因此面积为x^2.

思考2: 图7中两道路交叉部分形状特殊, 但其面积是多少呢? 有人猜想也是x^2, 为什么呢? 有人认为经两次平移出现一个边长为x的正方形, 所以面积为x^2.

思考3: 图8呢? 有人猜想交叉部分面积是x^2, 道理同上.

概括: 设矩形的边长分别为a、b, 余下部分面积为S, 则

结论1　若两条道路中有一条平行于矩形的边, 另一条道路形状为直线, 或折线, 或曲线, 面积关系总有$(a-x)(b-x)=S$.

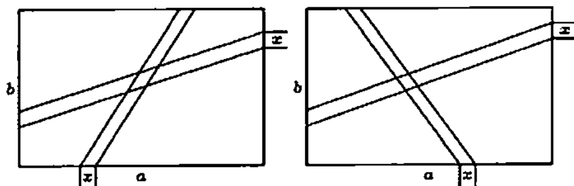
这是因为我们都可以通过两次平移, 得到中间无空隙、无交叉的新矩形, 故面积关系总有$(a-x)(b-x)=S$.

思考4: 如果两条道路都是斜线呢? 如图12(1)、图12(2), 平移方法还能发挥作用吗?

通过实践操作, 直观确认.

将图12(1)、图12(2)中的四块种植部分绘制出来, 再平移到一块, 形成图12(3)、图12(4)的情形: 前者中间有一块平行四边形交叉区域, 则$(a-x)(b-x)<S$; 后者中间有一块平行四边形空隙区域$(a-x)(b-x)>S$.

学生用矩形纸张剪拼, 确认结果.



(1)　(2)

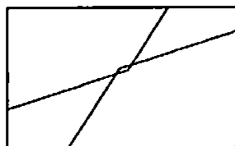
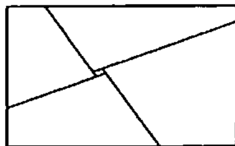


(3)　(4)

图 12

结论2　两斜线道路面积关系$(a-x)(b-x)\neq S$.

思考5: 如果两条道路是一斜一曲或双曲呢? 结论亦如此.

问题: 用两条等宽的纸带交叉重叠地放在一起, 小红认为它是菱形, 你认为她说得正确吗?

4. 追根溯源, 探究本质

4.1 *形状探究, 正本清源*

为讨论问题的方便, 我们先做如下约定:

(1) 规则道路: 出入口分别在矩形的对边上; 道路的一边可以通过平移移到另一边.

(2) 把道路一边平移到另一边时出(入)口宽度叫做道路平移宽度.

(3) 道路两边之间的最短距离叫做道路宽度.

显然, 出(入)口宽度＝平移宽度⩾道路宽度. 可见, 道路宽度与出(入)口宽度是有区别的.

接下来的探究已超出一元二次方程及以前所学知识范围, 需要利用下一章三角函数知识, 但应让学生明白, 只有不断学习新的知识和手段才可以解决层出不穷的新问题.

教师备课参考:

如图13, 设两条直线形道路相交于A、B、C、D, 出入口宽度均为x. 再设东西方向道路边与矩形南北方向左边的交点为G, 夹角为α, 南北

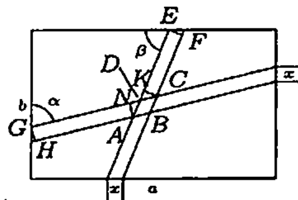


图 13

方向道路边与矩形东西方向上边的交点为E, 夹角为β. 交叉部分四边形$ABCD$是什么形状呢?

过点G作$GH\perp CG$交对边或延长线于点H, 则$GH=x\sin\alpha$, 过点E作$EF\perp AE$交对边或延长线于点F, 则$EF=x\sin\beta$.

过点C作$CK\perp AE$于点K, 则

$$CD=\frac{CK}{\sin\angle CDK}=\frac{x\sin\beta}{\sin\angle CDK}.$$

过点A作$AN\perp CG$于点N, 则

$$AD=\frac{AN}{\sin\angle ADG}=\frac{x\sin\alpha}{\sin\angle CDK}.$$

当$\sin\alpha=\sin\beta$, 即$\alpha=\beta$或$\alpha+\beta=180^\circ$时, $AD=CD$, 故$\square ABCD$为菱形.

当$\sin\alpha\neq\sin\beta$, 即$\alpha\neq\beta$且$\alpha+\beta\neq180^\circ$时, $AD\neq CD$, 故$\square ABCD$不是菱形.

当$\alpha=90^\circ$, $\beta\neq90^\circ$时, 可得东西方向道路宽度=出入口宽度; 当$\alpha\neq90^\circ$, $\beta=90^\circ$时, 可得南北方向道路宽度=出入口宽度.

当α、β在0°到90° (或90°到180°) 范围内时, 由$GH=x\sin\alpha$, $EF=x\sin\beta$可知, 如果东西、南北道路宽度相等, 即$GH=EF$, 可推得$AD=CD$, 则交叉部分为菱形, 即可得等宽的条形实物交叉部分一定是菱形.

由于东西、南北道路的入口宽度均为x, 因此$\dfrac{GH}{EF}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, 可见, 尽管平移宽度处处相等(等于出入口宽度), 但是斜(曲)线道路宽度未必处处相等.

4.2 *面积关系, 定量表达*

这会涉及多个三角公式, 教师有责任在教学生掌握知识的同时, 还要让学生明白, 对一个知识、问题的认识, 仅靠现在或初中阶段是难以穷尽的, 只有进一步学习才能更深刻地认识它们.

对于结论1、结论2, 作为教师应努力弄清楚其中的数学道理, 为学生答疑、解惑.

教师备课参考:

设$\angle ADG=\delta$度.

$$\begin{aligned}\text{故}\ \delta&=\angle ADG=180^\circ-\angle EDG\\&=180^\circ-(360^\circ-\alpha-\beta-90^\circ)\\&=\alpha+\beta-90^\circ.\end{aligned}$$

$$\sin\delta=\sin(\alpha+\beta-90^\circ)=-\cos(\alpha+\beta).$$

过点C作$CK\perp AE$交AE于点K, 则$CK=EF$. 在$\mathrm{Rt}\triangle CDK$中, $\sin\delta=\dfrac{CK}{CD}$,

$$\therefore CD=\frac{CK}{\sin\delta}=\frac{x\sin\beta}{-\cos(\alpha+\beta)}.$$

同理, $AD=\dfrac{x\sin\alpha}{-\cos(\alpha+\beta)}$.

$$\begin{aligned}S_{\square ABCD}&=AD\cdot CK=\frac{x^2\sin\alpha\sin\beta}{-\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{x^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{x^2}{1-\cot\alpha\cot\beta}.\end{aligned}$$

① 当$\alpha=90^\circ$或$\beta=90^\circ$时,

$\cot\alpha\cot\beta=0$,

则$S_{\square ABCD}=\dfrac{x^2}{1-\cot\alpha\cot\beta}=x^2$.

于是, 剩余面积$S=ab-ax-bx+x^2=(a-x)(b-x)$.

② 当α、β一个为锐角, 另一个为钝角时,

$\cot\alpha\cot\beta<0$,

则$S_{\square ABCD}=\dfrac{x^2}{1-\cot\alpha\cot\beta}<x^2$.

进一步, 推得剩余面积$S<ab-ax-bx+x^2=(a-x)(b-x)$.

③ 当α、β同为锐角或同为钝角时,

$\cot\alpha\cot\beta>0$,

则$S_{\square ABCD}=\dfrac{x^2}{1-\cot\alpha\cot\beta}>x^2$.

进一步, 推得剩余面积$S>ab-ax-bx+x^2=(a-x)(b-x)$.

结论1、结论2得证. 当两条道路均为直线形道路时, 剩余面积S并非都是$(a-x)(b-x)$.

5. 反思的反思

(1) 新课程要求

新课程将应用题纳入"问题解决"组成部分, 十分重视数学的实际应用, 突出了数学与生活的联系, 情境丰富、应用广泛、特色鲜明. 形成由学生自主探索、尝试、发现与建构的教学模式.

(2) 学生学习现状

学生学习新课程应用题时感觉难度大, 一是情节多, 陈述长, 理解难; 二是较多情境远离自身生活实际, 缺乏感性认识, 从条件到问题转化难; 三是数量关系链长, 建模难.

(3) 对策

要重视培养学生对信息材料的处理能力和数学模型的建立能力, 允许学生个性化地学习, 淡化探求解题思路过程形式化, 不仅仅追求"言必有据", 还鼓励直觉、猜想、预测、合情推理

创新在质疑中萌芽，智慧在问题中飞扬

210044 江苏省南京育英第二外国语学校 殷 艳

“学成于思，思源于疑”．“疑”是人类打开宇宙大门的金钥匙．所谓质疑问难就是发现问题、提出问题．问能解惑，问能知新，任何科学的发现无不都以问题开始的．问题是思维的动力，创新精神的摇篮．笔者在过去一年的教学实践中，鼓励学生质疑，课堂中给学生质疑的机会，课后给学生搭建质疑的平台，收获了不少学生带来的意外惊喜，这些惊喜无不闪烁着学生智慧的光芒，创造和发现已悄然萌芽．

案例1：

七(2)班数学课之前，“调皮鬼”生A过来问道：“老师，-3有没有零次幂？-3的零次幂是不是1?”

笔者一听，第一反应是，这家伙定是看了八年级的书，来显摆自己比别人多知道一个“零次幂”．但笔者还是沉住气，问道：“你怎么想到问这个问题”？“昨天做作业时想到的”．说完，他回到座位，很快拿来昨天的一份练习卷，指给笔者看倒数第二题，题目是这样的：

找出下面第一组数的规律，并说出第二组数与第一组相应数之间的关系：

(1) $-3, 9, -27, 81\cdots\cdots$

(2) $1, -3, 9, -27\cdots\cdots$

生A说道：“第一组数的规律是$(-3)^n$ (n为正整数)，并且把它们除以-3得到第二组相应的数．我想，第二组数的规律可以表示成$(-3)^{n-1}$ (n为正整数)，其中$n=1$时，出现-3的零次幂了，而且我觉得-3的零次幂等于1.” 笔者暗自惊喜，不禁对这个生A刮目相看．

点评：虽然零指数幂在八年级就要学到，但对于一名从未接触过零指数幂的七年级学生来说，发现和提出这个问题实在令人欢欣鼓舞，是一种自发的“再创造”，今天的“再创造”就有可能实现明天的创造．

为了培养学生质疑，提出问题、分析问题、解决问题的创新能力，初一数学组开设了一个“释疑解惑”兴趣小组活动班，鼓励学生只要是自己学习、思考、钻研过程中产生的问题，不管多么“简单”，都是值得赞赏的，能提出问题的学生是有思想的学生，并提出“思考求疑，大胆质疑，创造性解疑”的班训．

具体操作方法为：把自己提出的问题写在纸

和适度的非形式化学习方式．探求解法，而不单纯是记忆步骤；探索模式，而不单纯是记忆类型；形成猜测，而不单纯是做些习题．教学应该重视过程，采取设疑、激疑，让学生带着问题走进应用题，同时让学生带着新的问题走出应用题，开展拓展、变式、一题多解教学，提高学生问题解决能力．

(4) 反思性教学的生命力

一位优秀教师的成长离不开不断的教学反思，教学反思可以进一步地激发教师终身学习的自觉冲动，不断的反思会不断地发现困惑，从而促使自己拜师求教，书海寻宝．不断教学反思，可以激活教师的教学智慧，探索教材内容的崭新表达方式，构建师生互动机制及学生学习的新方式．教学反思贯穿教师专业发展始终，让我们做一个智慧型教师吧！

参考文献

[1] 熊川武． 论反思性教学 [J]． 教育研究，2002(7)：12-17.

[2] 罗永勋．基于反思性教学的反思．http://www.pep.com.cn.

[3] 刘耀明．基于教师专业发展的反思性教学．集美大学学报(教育科学版)[J]．2003(4)：50-54.

[4] 绪智．反思性教学．http://wenku.baidu.com/view/ b4e7f1b069dc5022aaea0018.html.

条上(数量不限),每周三交到数学办公室,老师选择有代表性且高质量的问题,周四写在小黑板上征解.在活动课上由应招者与大家共同探讨问题,每节课评选一个"最佳提问"与"最佳解答",并给予物质奖励.

这种传统方法有许多不便之处,后来充分利用现代网络,建立一个名为"数学家园"的论坛,制定奖励政策,吸引大量学生参与.学生们在这个家园里,打破时间、空间的限制,与其他同学和老师对话,提出并讨论数学问题,研究思考题,相互竞争,互相切磋,大量的信息交流与积分兑换奖品的诱惑极大调动学生积极性.从中涌现出了不少质量极高的问题与解答,让我们发现这些孩子平时难以看到的一面.现撷其二、三与大家分享:

案例2:

释疑解惑兴趣班成员生B提出这样一个问题:如何用图形去掉$(a+b)^2$中的括号?

点评:七年级的学生还没有学习多项式的乘法以及完全平方公式,但在学习整式加减时,感受、认识到图形与代数式之间的联系后,这位学生联想能不能用图形的方法展开代数式$(a+b)^2$?其不仅领悟到数形结合数学思想方法之精髓,而且进行了自觉地延伸拓展,想象力之丰富令老师为之赞叹.

案例3:

生C在论坛上质疑:我们都知道科学记数法:"一个大于10的数可写成a乘上10的n次方的形式,其中a大于等于1小于10,n为正整数."问题是当$a=1$,$n=1$时形式符合定义中的条件,但结果为10,并不大于10,与前提产生矛盾,怎么回事?

点评:这个科学记数法的定义,笔者也未曾发现这个"矛盾",但这位学生指出的,似乎定义还真有"不严密"之处啊.更妙的是,有学生作了如下回答:"我认为这个问题很特殊,因为条件中必须是$a=1$且$n=1$,那么这种情况我认为没有必要写成科学记数法.因为科学记数法是用来记读写都不方便的大数,这里1×10^1就等于10,没必要大费周折,直接写10就可以了."学生的能量不可小觑啊.

案例4:

如图1:在边长为1的正方形纸板上,依次贴上面积为$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n}$的长方形彩色纸片($n$为大于1的整数),请你用"数形结合"的思想,依数形变化的规律,计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=$______.

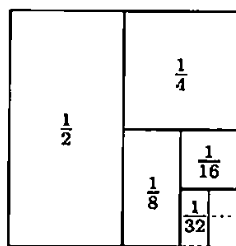


图1

生D发帖提出:除了用这种图形的分割方法,还有其他方法吗?我目前还找到了两种:一是长一样,宽除以2的画法(如图2);二是三角形的画法(如图3).还有其他方法吗?一共有多少种方法?是有限还是无限呢?如果哪位同学想到了一定要告诉我哦!

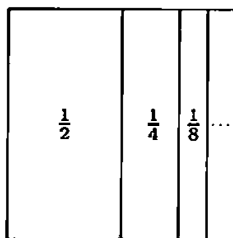


图2

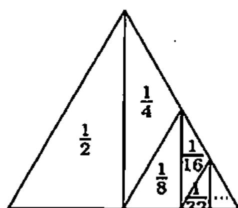


图3

生E跟贴说,圆也可以,如图4.

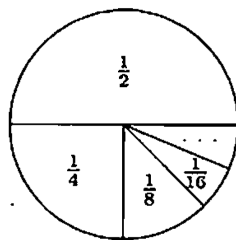


图4

点评:利用正方形图形来计算无穷算式,是经典方法,直观且通俗易懂,让没有学过极限的七年级学生轻松化解无穷算式.作为教者除了感叹前人创造方法之巧妙,别无他想.而我们的学生却想到除了利用正方形,还可以利用其他图形,思维发散,让我们看到"经典"也有创新之处.抓住"数形结合"之本质,换一种形式又有

(下转第3-49页)

"布罗卡点"问题背景下的探究性学习

201801 上海市育才中学 龚新平

如果$\triangle ABC$内有一点P满足$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$或$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$, 则把点$P$称为布罗卡点, 角$\alpha$称为布罗卡角. 近年来在各类竞赛和自主招生试卷中经常出现有关布罗卡点和布罗卡角的问题, 本文就是在2011年北大保送生数学考试一题(例4)的启发下对布罗卡点(角)的基本性质以及布罗卡点(角)背景下相关的几个变式问题进行的探究性学习.

性质一　角α为$\triangle ABC$的布罗卡角, 则有$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$.

证: 如图1, 不妨设点P满足$\angle PCA=\angle PBC=\angle PAB=\alpha$, $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$. 由余弦定理得$x^2=b^2+z^2-2bz\cos\alpha$, $y^2=c^2+x^2-2cx\cos\alpha$, $z^2=a^2+y^2-2ay\cos\alpha$, 三式相加得$2(bz+cx+ay)\cos\alpha=a^2+b^2+c^2$, 又因为$(bz+cx+ay)\sin\alpha=2S_{\triangle ABC}$, 故有$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$.

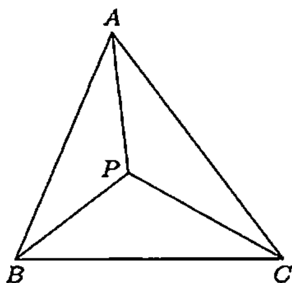


图1

例1　点P是$\triangle ABC$内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$, 求$\tan\alpha$的值.

解: 由$p=\dfrac{13+14+15}{2}=21$, 知$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=84$, 故$\tan\alpha=\dfrac{4S_{\triangle ABC}}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{168}{295}$.

例2　点P是$\triangle ABC$内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 求证: $\alpha\leqslant 30^\circ$.

证: 由著名的外森比克不等式$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$知$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}\geqslant\sqrt{3}$, 故$\alpha\leqslant 30^\circ$.

例3　点P是$\triangle ABC$内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 当顶点$B$与$C$固定而顶点$A$变动时保持角$\alpha$是常值, 试探求动点$A$的轨迹.

解: 设$B\left(-\frac{a}{2},0\right)$、$C\left(\frac{a}{2},0\right)$、$A(x,y)$, 由$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$得

$$\cot\alpha=\frac{a^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}{2ay},$$

即$x^2+\left(y-\dfrac{a\cot\alpha}{2}\right)^2=a^2\cdot\dfrac{\cot^2\alpha-3}{4}$.

由例2知$a^2\cdot\dfrac{\cot^2\alpha-3}{4}\geqslant 0$,

故动点A的轨迹是圆或一个点.

性质二　角α为$\triangle ABC$的布罗卡角, 则有$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$.

证: 对$\triangle ABC$连用三次余弦定理得$a^2+b^2+c^2=2ab\cos C+2ac\cos B+2bc\cos A$, 由$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$易得

$$\begin{aligned}\cot\alpha&=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}\\&=\frac{2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C}{4S_{\triangle ABC}}\\&=\cot A+\cot B+\cot C.\end{aligned}$$

例4　(2011北大保送试题) $\triangle ABC$中一点O满足$\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$, 求证: 三边成等比数列.

证: 由题意得布罗卡角$\alpha=\dfrac{A}{2}$, 结合$\cot\alpha=$

$\cot A+\cot B+\cot C$得$\cot\dfrac{A}{2}-\cot A=\cot B+\cot C$，切割化弦易得$\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，即$\sin^2 A=\sin B\sin C$，$a^2=bc$，故三边$b$、$a$、$c$成等比数列.

例5　点P是$\triangle ABC$内一点，$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$，试用$\sin A\sin B\sin C$，$\cos A\cos B\cos C$表示$\cot\alpha$.

解：由$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$得

$$\begin{aligned}\cot\alpha&=\frac{\cos A\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}\\&=\frac{\cos A(\cos B\cos C-\cos(B+C))}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{\sin A\sin(B+C)}{\sin A\sin B\sin C}\\&=\frac{\cos A\cos B\cos C+1}{\sin A\sin B\sin C}.\end{aligned}$$

性质三　角α为$\triangle ABC$的布罗卡角，则有$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$.

证：由$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$，则$\csc^2\alpha-(\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C)=1+(\cot A+\cot B+\cot C)^2-(3+\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C)=2\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}-2=0$，故有$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$.

例6　点P是$\triangle ABC$内一点，$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$，且$\angle B=\angle C$，求证：$\sin\alpha=\dfrac{\sin A}{\sqrt{5-4\cos A}}$.

证：由$\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2\alpha}&=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{2}{\sin^2 B}\\&=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{2}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{5-4\cos A}{\sin^2 A},\end{aligned}$$

故有$\sin\alpha=\dfrac{\sin A}{\sqrt{5-4\cos A}}$.

探究一：已知$\triangle ABC$的布罗卡点为P，R_1、R_2、R_3分别为$\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CAP$外接圆的半径，R为$\triangle ABC$外接圆的半径(如图1)，求证：$R_1R_2R_3=R^3$.

证：由$\angle APB=\pi-A$，$\angle BPC=\pi-B$、$\angle APC=\pi-C$，得

$$R_1=\frac{c}{2\sin A},\ R_2=\frac{a}{2\sin B},\ R_3=\frac{b}{2\sin C},$$

故有$R_1R_2R_3=\dfrac{abc}{8\sin A\sin B\sin C}=R^3$.

例7　点P是$\triangle ABC$内一点，满足$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$，已知$\triangle ABP$、$\triangle BCP$、$\triangle CAP$外接圆的半径分别为2、3、4，求$\triangle ABC$的外接圆半径(答案：$2\sqrt[3]{3}$).

探究二：若$\triangle ABC$的布罗卡角为α，则布罗卡点P在三边上的射影三角形$\triangle DEF$满足$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}\cdot\sin^2\alpha$.

证：如图2，不妨设$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$，由$P$、$A$、$F$、$E$四点共圆易知：

$\angle PFE=\angle PAE=\alpha$，$\angle PEF=\angle PAF$，同理$\angle PED=\angle PDF=\alpha$，所以点$P$仍是$\triangle DEF$的布罗卡点，且$\triangle EFD\backsim\triangle ABC$，相似比为$\dfrac{PE}{PA}=\sin\alpha$，故$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}\cdot\sin^2\alpha$.

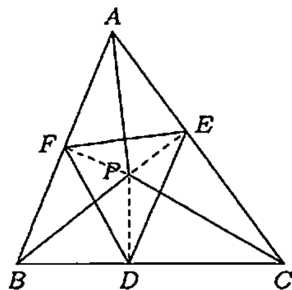


图2

例8　边长为1、$\sqrt{3}$、2的$\triangle ABC$布罗卡点为P，点P到$\triangle ABC$三边的垂足组成$\triangle A_1B_1C_1$，点P到$\triangle A_1B_1C_1$三边的垂足组成$\triangle A_2B_2C_2$，以此类推，……，求该过程中得到的所有三角形面积和.

解：易知$\cot\alpha=\cot 30^\circ+\cot 60^\circ+\cot 90^\circ=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，所以$\sin^2\alpha=\dfrac{3}{19}$. 由探究二，上述所有三角形面积构成公比为$q=\dfrac{3}{19}$的无穷等比数列，故所有面积和

$$S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\frac{S_1}{1-q}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{19}}=\frac{19\sqrt{3}}{32}.$$

探究三：点P是$\triangle ABC$内一点，$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$，则有向量等式

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{c^2}+\frac{\overrightarrow{PB}}{a^2}+\frac{\overrightarrow{PC}}{b^2}=\overrightarrow{0}.$$

证：根据题意有$S_{\triangle PBC}\cdot\overrightarrow{PA}+S_{\triangle PAC}\cdot\overrightarrow{PB}+$

$S_{\triangle PAB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$,

故 $a\cdot PC\sin\alpha\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot PA\sin\alpha\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot PB\sin\alpha\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$.

而$\angle APB=\pi-A$, $\angle BPC=\pi-B$、$\angle APC=\pi-C$, 有

$$PC=\frac{b\sin\alpha}{\sin C},\ PA=\frac{c\sin\alpha}{\sin A},\ PB=\frac{a\sin\alpha}{\sin B}.$$

代入前式可得 $\dfrac{ab\overrightarrow{PA}}{\sin C}+\dfrac{bc\overrightarrow{PB}}{\sin A}+\dfrac{ac\overrightarrow{PC}}{\sin B}=\overrightarrow{0}$,

结合正弦定理即得 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{c^2}+\dfrac{\overrightarrow{PB}}{a^2}+\dfrac{\overrightarrow{PC}}{b^2}=\overrightarrow{0}$.

例9 P是$\triangle ABC$内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 且$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$, 求角$\alpha$的大小.

解: 由探究三可设$c=k$, $a=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$, 则$\cos B=\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{46}}{12}$, $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{23}k^2}{24}$, 由性质一, 易得$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}=\dfrac{11}{\sqrt{23}}$, 即$\alpha=\operatorname{arccot}\dfrac{11}{\sqrt{23}}$.

探究四: 点 P 是 $\triangle ABC$ 的布罗卡点, 且 $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$, 如何求三条布罗卡线段$PA$、$PB$、$PC$的长度呢?

解: 如图3, 由探究三的向量等式知$S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{c^2}:\dfrac{1}{a^2}:\dfrac{1}{b^2}$, 则$BA_1:A_1C=S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PAC}=a^2:b^2$, 由斯图瓦尔特定理得$b^2AB^2+a^2AC^2=(a^2+b^2)AA_1^2+\dfrac{a^2b^2BC^2}{a^2+b^2}$, 故$AA_1=\dfrac{b\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}{a^2+b^2}$.

又由$PA_1:AA_1=S_{\triangle PBC}:S_{\triangle ABC}$易得

$$PA=\frac{bc^2}{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}};$$

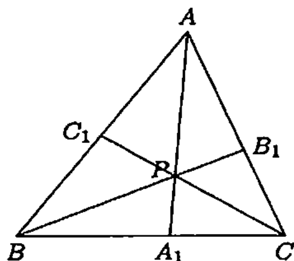


图 3

同理$PB=\dfrac{a^2c}{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}$,

$PC=\dfrac{ab^2}{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}$. 进而

$$PA+PB+PC=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}.$$

例10 点 P 是 $\triangle ABC$ 的布罗卡点, 且 $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$, $BC=1$, $AC=\sqrt{3}$, $AB=2$, 求三条布罗卡线段PA、PB、PC的长度之和.

解: 由探究四易知$PA+PB+PC$

$$=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2}}=\frac{5+4\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

探究五: $\triangle ABC$的布罗卡角α与三个差角$(A-\alpha)$、$(B-\alpha)$、$(C-\alpha)$有怎样的关系呢?

5.1 点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 求证: $\sin^3\alpha=\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)$.

证: 如图2, 由$\sin(A-\alpha)=\dfrac{PF}{PA}$, $\sin(B-\alpha)=\dfrac{PD}{PB}$, $\sin(C-\alpha)=\dfrac{PE}{PC}$, 三个等式相乘, 并结合$\sin\alpha=\dfrac{PE}{PA}=\dfrac{PF}{PB}=\dfrac{PD}{PC}$, 易得结论成立(亦可由角元塞瓦定理直接得证).

5.2 点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 则$\alpha^3\leqslant(A-\alpha)(B-\alpha)(C-\alpha)$.

证: 考虑函数$f(x)=\ln\dfrac{x}{\sin x}$在$(0,\pi)$上的凸性, 由$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\cot x>0$, $f''(x)=\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}>0$, 结合$\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{6}$得$f(\alpha)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{3\alpha+(A-\alpha)+(B-\alpha)+(C-\alpha)}{6}\right)\leqslant\dfrac{3f(\alpha)+f(A-\alpha)+f(B-\alpha)+f(C-\alpha)}{6}$.

代入函数$f(x)=\ln\dfrac{x}{\sin x}$中展开, 即得

$$\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^3\leqslant\frac{(A-\alpha)(B-\alpha)(C-\alpha)}{\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)},$$

由探究5.1结论, 易得$\alpha^3\leqslant(A-\alpha)(B-\alpha)(C-\alpha)$, 当且仅当$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$等号成立.

例11 点P是$\triangle ABC$内一点, $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA=\alpha$, 试比较$2\alpha$与$\sqrt[3]{ABC}$的大小.

解: 由探究 5.2 知 $\alpha^3\leqslant(A-\alpha)(B-\alpha)(C$

一道三角形探究问题的探索和研究

314200 浙江省平湖市新华爱心高级中学 毛良忠

笔者最近遇到一道初中数学探究题, 刚拿到题时感觉题目亲切、熟悉, 但再深入探究时竟然困难重重, 折腾了半小时后才有点眉目, 在深入思考后又发现了一些有趣的结论, 下面将自己探究解决问题的历程呈现出来.

探究问题: 已知锐角三角形$\triangle ABC$三边满足$BC > AC > AB$, 现将$\triangle ABC$补成长方形, 使得$\triangle ABC$的两个顶点为长方形的两个端点, 第三个顶点落在长方形这一边的对边上, 这样的长方形可以画几个, 所画的长方形中哪个周长最小?

如何解决这个问题呢? 最初的反应就是先将问题转化为能进行实际说理运算的数学问题——这往往是学生最头疼的地方, 特别是低年级学生, 他们习惯于感性认识, 习惯于画画、看看、比比中作数学, 不会用数学的眼光看问题.

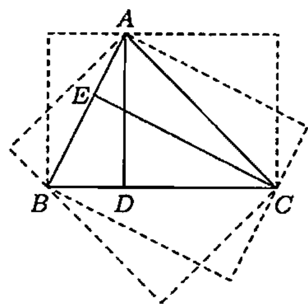


图 1

最初的想法 如果我们将满足题意的长方形称作三角形的外接矩形的话, 则如图1的三个长方形就是满足题意的外接矩形. 不难发现外接矩形的周长其实就是三角形的一边边长与该边上高之和的两倍. 设$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, 对应的高分别为h_c、h_a、h_b, 于是问题转化为: 当$a > b > c$时, 如何比较$a + h_a$、$b + h_b$、$c + h_c$三者的大小关系呢?

方法一: 考虑到$2S_{\triangle ABC} = a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c$, 则$h_a = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a}$, $h_b = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{b}$, $h_c = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c}$, 构造函数$f(x) = x + \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{x}$, 于是问题转化为求此函数的单调性. 对于高中同学来说它是熟悉的对勾函数, 可如何比较a、b、c和$x = \sqrt{2S_{\triangle ABC}}$的大小呢? 这样的说理初中生能听懂吗? 面对这些疑惑笔者不得不先放弃这个思路.

换一种思路 要比较大小常用的方法就是作差比较, 这个方法初中生应该是能接受的, 不妨一试:

方法二: 我们先比较$(a + h_a) - (b + h_b)$

$$= (a - b) + \left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{a} - \frac{2S_{\triangle ABC}}{b}\right)$$

$$= (a - b)\left(\frac{ab - 2S_{\triangle ABC}}{ab}\right),$$

由于$\triangle ABC$是锐角三角形, 故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \times \sin C < \frac{1}{2}ab,$$

所以$a + h_a > b + h_b$.

同理$b + h_b > c + h_c$.

由此知锐角三角形的外接矩形中以最小边

$-\alpha)$, 故$\alpha^6 \leqslant (\alpha(A - \alpha))(\alpha(B - \alpha))(\alpha(C - \alpha)) \leqslant \left(\dfrac{A}{2}\right)^2\left(\dfrac{B}{2}\right)^2\left(\dfrac{C}{2}\right)^2$, 即$2\alpha \leqslant \sqrt[3]{ABC}$, 当且仅当$A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$时等号成立.

关于布罗卡点 (角) 可以探究的问题还有很多, 笔者愿与有兴趣的读者继续交流与探究!

参考文献

[1] 范端喜. 一道2011年北大保送生考试题的多种解法[J]. 数学教学, 2011 (9): 38-40.

[2] 熊斌, 冯志刚主编. 数学奥林匹克一讲一练 (高一年级)[M]. 上海: 上海科学普及出版社, 2002. 7.

为边所画的外接矩形周长最小. 问题得到了解决, 可出现了含三角函数的面积公式, 能不能回避面积呢?

盯住条件$a\times h_a=b\times h_b=c\times h_c$, 能否将相关字母转化? 可以一试!

方法三: 由于$(a+h_a)-(b+h_b)$

$=(a-b)+(h_a-h_b)$

$=(a-b)+\left(h_a-\dfrac{a\times h_a}{b}\right)=\dfrac{(a-b)(b-h_a)}{b}$,

利用直角三角形边的关系易知$h_a<b$, 所以$a+h_a>b+h_b$.

同理$b+h_b>c+h_c$.

由此知锐角三角形的外接矩形中以最小边为边所画的外接矩形周长最小. 此解法借助直角三角形斜边和直角边的关系, 使得两组数值作差比较大小成功, 所用的知识浅显易懂, 是初中学生能接受的, 这也许就是命题老师的理想解法吧.

在方法二中我们用到了面积公式, 其实如果借用三角函数可更简便求解.

方法四: 由于$\dfrac{h_a}{b}=\dfrac{h_b}{a}=\sin C$, 所以

$(a+h_a)-(b+h_b)$

$=(a+b\sin C)-(b+a\sin C)$

$=(a-b)(1-\sin C)$,

由于$\triangle ABC$是锐角三角形, 故$\sin C<1$, 因此$a+h_a>b+h_b$.

同理可证$b+h_b>c+h_c$.

如此简洁的证明过程, 应该感谢三角函数的介入. 正如张景中院士所言: "数学课程中三角至关重要, 三角是联系几何和代数的一座桥梁, 沟通初等数学和高等数学的一条通道". 三角下放, 全盘皆活.

让我们重新回到最初的想法看看方法一是否可行:

如果我们能够得到最小边$c>\sqrt{2S_{\triangle ABC}}$, 就可以利用对勾函数的单调性顺利解决问题. 要得到$c>\sqrt{2S_{\triangle ABC}}$, 即转化为$\dfrac{1}{2}c^2>S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$, 也就是要说明$c>a\sin B$, 但这个结论在锐角三角形中不一定成立, 也就是说, 要通过对勾函数的单调性证明是有困难的.

至此我们对这个问题有了较满意的解答, 并且得到了一个结论: 锐角三角形的外接矩形中以最小边所画的外接矩形的周长最小. …………(*)

著名数学大师波利亚曾告诫我们学习数学要学会回顾, 不然就似入宝山而空返. 进一步的思考探究: 你能提出一个与它相类似的问题吗?

探究一: 已知锐角三角形$\triangle ABC$三边满足$BC>AC>AB$, 现将$\triangle ABC$补成平行四边形, 使得$\triangle ABC$的两个顶点为平行四边形的两个端点, 第三个顶点落在平行四边形这一边的对边上, 这样的平行四边形可以画几个, 所画的平行四边形中哪个周长最小?

分析: 如图2, 满足题意的外接平行四边形有无数个, 由于平行四边形的边长大于等于三角形$\triangle ABC$的高AH的长, 故所画的外接平行四边形中周长最小的仍是以最小边为一边所画的外接矩形.

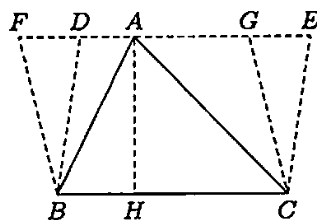


图 2

原题中的外接矩形在视觉上给人一种感觉是所画的矩形将三角形覆盖住了, 这让人想到下面的问题:

探究二: 能否找到一个面积最小的矩形使得它将锐角三角形$\triangle ABC$完全覆盖.

分析: 用矩形纸片覆盖三角形图形, 常见类型如下图3～图5, 显然图4的矩形面积小于图3

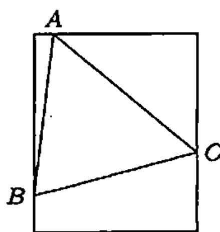


图 3

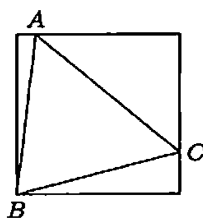


图 4

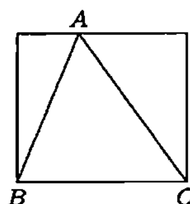


图 5

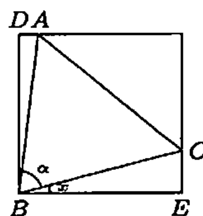


图 6

巧折黄金矩形

238321　安徽省无为县白茆中心学校　倪受兰

黄金分割是几何中的著名问题, 在古代就引起了重视, 古希腊数学家欧多克斯(公元前408年——前355年)也曾研究过这个问题. 黄金分割被广泛地用在设计中, 比如黄金矩形, 就是黄金分割在设计中的一个主要应用. 设计建筑物、工艺品、日常用品等用到矩形时, 若设计成黄金矩形, 容易让人们感到美与和谐. 那么如何才能得到黄金矩形呢?

人们一般通过作图得到黄金比, 从而得到黄金矩形, 过程较为烦琐但很精确. 除此以外, 我们还可以通过折纸的方法巧妙、快速地得到黄金矩形.

折纸是常见的民间传统手工艺术之一, 民间艺人能折出许多精美绝伦的作品, 其中也有一些特殊的几何图形. 人民教育出版社初中《数学》将"用折纸的方法得到黄金矩形"作为"数学活动"之一, 意在通过这一数学活动将数学知识与折纸这项民间艺术紧密结合起来, 更加突出数学及其应用价值. 折黄金矩形, 看似简单, 但如果不能领会其实质, 即使能模仿地折出黄金矩形, 也未必就是真正的会了. 但只要教法得当, 学生不仅能快捷通过折纸得到黄金矩形, 并且方法多样.

下面介绍笔者是如何教学生"用折纸的方法

矩形的面积. 我们如果能证明图5的矩形面积是最小的, 问题就得到解决.

如图6, 不妨设 $\angle ABC=\alpha$, $\angle CBE=x$, 则 $\angle ABD=90^\circ-\alpha-x$. 由外接矩形易得

$BE=a\cdot\cos x$, $BD=c\cdot\cos(90^\circ-\alpha-x)=c\cdot\sin(\alpha+x)$.

$$S_{矩形}=BD\times BE=ac\cos x\cdot\sin(\alpha+x)$$
$$=\frac{1}{2}ac[\sin(2x+\alpha)+\sin\alpha].$$

由于 $0^\circ\leqslant x\leqslant 90^\circ-\alpha$, 所以 $\alpha\leqslant 2x+\alpha\leqslant 180^\circ-\alpha$, 因此当 $x=0^\circ$ 或 $90^\circ-\alpha$, 即矩形的边与三角形一边重合时, 外接矩形面积最小. 结合结论(*), 当锐角三角形的最小边恰好是外接矩形的一边时, 所得的覆盖三角形的矩形面积最小且周长最小.

如果所作的矩形是在三角形内部, 又会有什么发现呢?

探究三: 能否在给定的锐角三角形中剪出面积最大的矩形? 请设计裁剪方法.

如果我们将四个顶点均在三角形的边上的矩形称作三角形的内接矩形, 下面我们重点研究一边在三角形边上的内接矩形的情形. 如图7, 假设矩形 $EGHF$ 内接于三角形 ABC, 设 BC 边长为 a, BC 边上的高长 h_a, 矩形一边 $EG=x$, 由三角形相似得 $\frac{EF}{a}=\frac{h_a-x}{h_a}$, 故 $EF=\frac{a(h_a-x)}{h_a}$. 所以 $S_{矩形}=\frac{a(h_a-x)x}{h_a}$, 因此当 $x=\frac{h_a}{2}$ 时, 内接矩形面积最大为 $\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 此时 E、F 分别为三角形两边的中点.

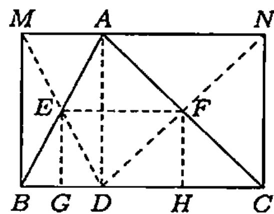


图 7

如果我们将锐角三角形的最小覆盖矩形和最大内接矩形都画出来, 你会惊奇地发现它们居然是相似的矩形, 一大一小竟然如此地和谐, 它让我们再一次感受到了数学的魅力. 同样, 在刚才的数学问题研究过程中, 我们也充分体会到学习的乐趣——原来数学就在我们身边, 数学也可以这样来学.

得到黄金矩形"的.

教学时, 笔者首先向学生介绍, 黄金矩形宽与长的数量关系, 我们把宽与长的比为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的矩形叫做黄金矩形. 这样就由折黄金矩形变为折出长为$\sqrt{5}$的线段.

于是, 笔者设计了这样的步骤:

① 请学生在方格纸中先画出长为$\sqrt{5}$的线段.

② 引导学生将矩形纸片折成我们要的方格纸(将矩形的宽视为2).

③ 在方格纸上折出长$\sqrt{5}$的线段. 如图1, 先折叠得到正方形ABB_1A_1, 再把正方形折成两个全等的矩形, 若设$AB=2$, 则$BD=\sqrt{5}$(图1中若连结AC、A_1C、B_1D, 它们的长都是$\sqrt{5}$).

(小组内交流, 做到人人能折出长为$\sqrt{5}$的线段.)

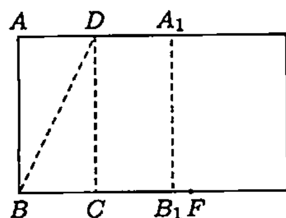


图1

④ 在全体学生都能折出长为$\sqrt{5}$线段之后, 再让学生折叠出长为$\sqrt{5}-1$的线段(如将图1矩形的对角线BD折到图中所示的BF处, 则$CF=\sqrt{5}-1$). 这是我们要折叠出黄金矩形的重要步骤之一.

由于有了上述的知识准备, 折纸过程中, 学生有了多种不同的折叠方法.

方法一

第一步: 在一张矩形纸片的一端, 利用图2的方法折出一个正方形, 然后把纸片展平.

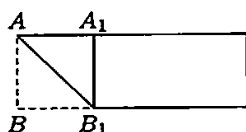


图2

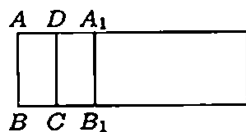


图3

第二步: 如图3, 把这个正方形折成两个全等的矩形, 再把纸片展平.

第三步: 折外侧矩形$ABCD$的对角线BD(图4), 前三步实质上是折出长为$\sqrt{5}$的线段.

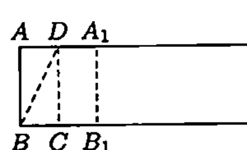


图4

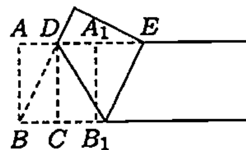


图5

第四步: 将BD折到图5中所示的DE处, 展平纸片, 这时$A_1E=\sqrt{5}-1$, 按照得到的点E折出EF. 矩形A_1B_1FE就是黄金矩形(图6).

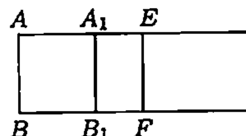


图6

证明: 若设$AB=2$, 则$A_1B_1=EF=AB=2$, $DE=BD=\sqrt{5}$, 所以$A_1E=\sqrt{5}-1$, 宽与长的比为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 矩形A_1B_1FE是黄金矩形(后面各折叠方法的证明略).

方法二

前三步与方法一相同, 折出长为$\sqrt{5}$的线段BD(图4).

第四步: 将BD折到图7中所示的BF处. 展平纸片, 这时$CF=\sqrt{5}-1$, 按照得到的点F折出FE, 矩形$CDEF$就是黄金矩形(图8).

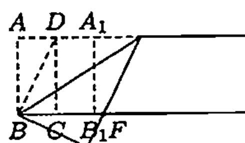


图7

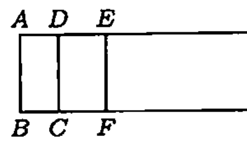


图8

方法三

前三步与方法一相同, 折出长为$\sqrt{5}$的线段BD(图4).

第四步: 将DA折到图9中所示的DG处, 得点G.

第五步: 将BG折到图10所示的BF处, 得点F, 这时$BF=BG=\sqrt{5}-1$, 展平纸片按照得到的点F折出EF, 矩形BB_1EF就是黄金矩形(图11).

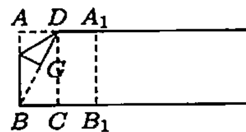


图9

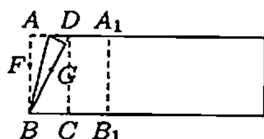


图 10

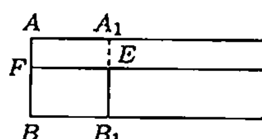


图 11

方法四

前两步与方法一的前两步相同，折出正方形ABB_1A_1.

第三步：折出外侧矩形$ABCD$的对角线AC，则$AC=\sqrt{5}$(图12).

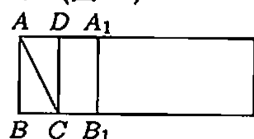


图 12

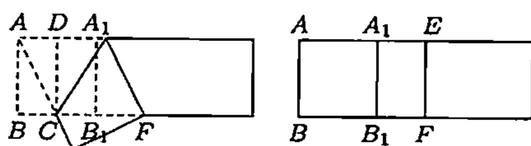


图 13

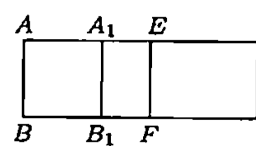


图 14

第四步：把CA折到图13中所示的CF处，这时$B_1F=\sqrt{5}-1$，展平纸片，按照得到的点F折出FE，矩形A_1B_1FE就是黄金矩形(图14).

方法五

前两步与方法一的相同，折出正方形ABB_1A_1.

第三步：折内侧矩形的对角线CA_1，则$CA_1=\sqrt{5}$(图15);

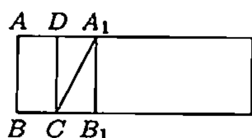


图 15

第四步：把CA_1折到图16中所示A_1M的处，再将DA_1折到图16的A_1E处，这时$EM=\sqrt{5}-1$，展平纸片，按照得到的点M折出MN，按照得到的点E折出EF，矩形$EFNM$就是黄金矩形(图17).

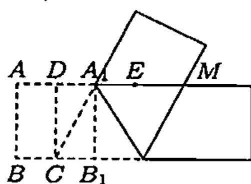


图 16

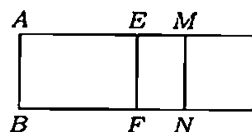


图 17

方法六

课本给出的一种折叠方法.

前三步与方法五的相同，折出长为$\sqrt{5}$的线段CA_1.

第四步：把CA_1折到图18中所示的CF处，这时$B_1F=\sqrt{5}-1$，展平纸片，按照所得的点F折出FE，矩形A_1B_1FE就是黄金矩形(图19).

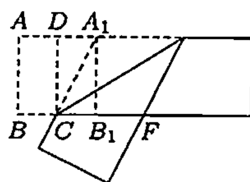


图 18

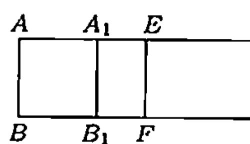


图 19

其实，图6中的矩形$ABFE$、图14中的矩形$ABFE$、图19中的矩形$ABFE$都是宽为2，长为$\sqrt{5}+1$的黄金矩形，宽与长的比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

可见，学生不仅能通过折纸得到黄金矩形，而且折叠方法多种多样.

折叠黄金矩形的活动激励了参与的每个学生，并给予学生认真观察，广泛联想，多方向、多角度、多层次去思考的机会. 在折纸过程中让学生体会到数学研究中的办法，能通过观察、尝试、转移、类推等途径去认识到其中的数学原理，参与到力所能及的探索中，同时也让学生形成一种“正确的答案或解题方法可能不止一种”的数学观.

自己会，或只教会少数人，这不是教学的最高目标，让全体学生学到学习的方法，并乐意参与到学习中去，这是现代教学理念所提倡的，笔者坚信这一理念，并将它用到课堂教学实践，使枯燥的数学课堂变得轻松、活泼，学生们变得爱学、乐学、并积极主动地参与到学习的过程中去. 学生的智慧在课堂上得以施展，并能展示他们非凡的才华. 本节课就为我们提供了大量不同的折黄金矩形的方法，还有类似于方法一与方法四的方法，是按不同的对角线折叠的，这里就不累赘.

由于水平有限，不妥不足之处敬请大家批评指正.

参考文献

义务教育课程标准实验教科书数学教师用书八年级(下册)[M]. 北京：人民教育出版社，2009.

三角形的周长和面积平分线

441035 湖北省襄阳市樊城区牛首镇竹条一中 彭 洁 谷兴武

本文将首先证明三角形的周长和面积平分线一定经过此三角形的内心; 其次通过尺规作图证明过三角形内心的一条直线只要平分了周长也就必然平分面积; 同样可以证明过内心的一条直线平分面积也必然平分周长, 它们互为充要条件.

先看下面一道例题

例1 (1996年全国初中数学联赛试题) 如果一个三角形的面积和周长都被一直线所平分, 那么该直线必通过这个三角形的 ……………… ( )

(A) 内心; (B) 外心; (C) 重心; (D) 垂心.

分析: 当该直线过三角形的顶点时, 三角形是等腰三角形, 这条直线(称具有这样特征的直线为三角形的周积平分线) 是底边的中垂线, 显然它过内心、外心、重心和垂心.

当该直线不过三角形的顶点时, 结论: 三角形的周积平分线, 一定经过此三角形的内心.

证明: 如图1, 设GH为$\triangle ABC$的一条周积平分线, P为$\triangle ABC$的内心, 令$\triangle ABC$的内切圆半径为r.

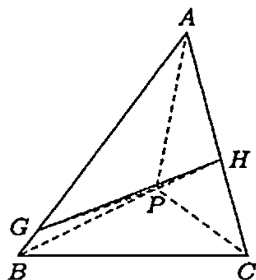


图 1

不失一般性, 设$\triangle ABC$的三边长为a、b、c, 三边两两互不相等, 记$\frac{1}{2}(a+b+c)=p$, G、H两点分别在边AB、AC上.

$$AG+AH=\frac{1}{2}(a+b+c)=p.$$

连结PA、PB、PC、PG、PH, 则

$$\begin{aligned}S_{\triangle AGH}&=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}\\&=\frac{1}{2}(S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB})\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}pr.\end{aligned}$$

又$\because$ $S_{\text{四边形}AGPH}=S_{\triangle PAG}+S_{\triangle PAH}=\frac{1}{2}AG\cdot r+\frac{1}{2}AH\cdot r=\frac{1}{2}pr$,

$\therefore$ $S_{\text{四边形}AGPH}=S_{\triangle AGH}$.

$\therefore$ G、P、H三点共线, 即GH经过点P.

可见, 任意一个三角形, 它至少存在一条周积平分线, 最多有三条周积平分线(如等边三角形). 这些周积平分线必过此三角形的内心.

下文将侧重展示过三角形内心平分三角形面积和过三角形内心平分三角形的周长的周积平分线的尺规作图法.

若三角形是等腰三角形, 那么它的一条周积平分线过它的顶角顶点和底边中点.

下面笔者把研究的重心放在三边互不相等的三角形上:

1. 过内心P作一直线, 使该直线将$S_{\triangle ABC}$的面积平分为二等分(如图2).

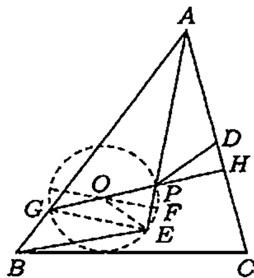


图 2

作法: ① 取AC的中点D, 作$S_{\triangle ABE}\backsim S_{\triangle APD}$ (两个三角形所处的位置犹如绕点A发生了位似旋转变换), A、P、E三点在一直线上;

② 再作PE的垂直平分线并且在该垂直平

分线上取一点O, 使$\angle POE=\angle BAC$;

③ 以O为圆心, OP为半径作圆, 该圆与AB相交于点G(取与A点较远的交点), 则由P、G两点所确定的直线平分$\triangle ABC$的面积.

注意: ① 作$\triangle APD$时, 要让$AP>AD$; ② 以O为圆心, OP为半径作圆, 该圆在边AB上要有交点(与A点较远的交点G必须在线段AB上), 如果不能满足这两点, 就换另外两个顶点或中点试试.

证明: 由$\triangle ABE\backsim\triangle APD$可得

$AD\cdot AB=AP\cdot AE.$ ……………………(1)

$\angle PAB=\angle PAD$, 设直线GP与AC的交点为H, 因P、E、G三点共圆, 所以$\overset{\frown}{PE}$所对的圆周角$\angle PGE=\frac{1}{2}\angle POE=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle PAC=\angle PAB$, 所以$\angle APH=\angle AGP+\angle PAB=\angle AGP+\angle PGE=\angle AGE$, 很容易证明$\triangle AGE\backsim\triangle APH$, 由此可得$AG\cdot AH=AP\cdot AE$. 结合(1)式可知道$AD\cdot AB=AG\cdot AH$, 从而有$\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin\angle BAC=\frac{1}{2}AG\cdot AH\sin\angle BAC$. 由于点$D$是$AC$的中点, 所以有$\frac{1}{2}AD\cdot AB\sin\angle BAC=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 即$\frac{1}{2}AG\times AH\sin\angle BAC=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 故直线$GH$平分$\triangle ABC$的面积.

那么, GH平分$\triangle ABC$的周长吗?

因为P为$\triangle ABC$的内心, 所以令$\triangle ABC$的内切圆半径为r(即P点到$\triangle ABC$的三边的距离), 可得$S_{\triangle AGH}=\frac{1}{2}AG\cdot r+\frac{1}{2}AH\cdot r$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r$. 又因$S_{\triangle AGH}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 所以有$AG+AH=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$, 故直线$GH$也平分$\triangle ABC$的周长.

2. 过内心P作一直线, 使该直线将$\triangle ABC$的周长平分为两等份(如图3).

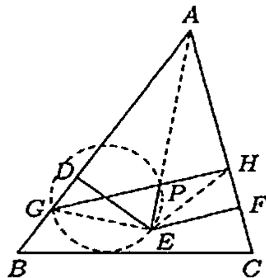


图 3

① 分别在边AB、AC或其延长线上截取AD、AF, 使$AD=AF=\frac{AB+BC+AC}{4}$;

② 分别过点D作直线AB的垂线与$\angle BAC$的平分线AP相交于点E, 连结EF, 易证$EF\perp AC$, $ED=EF$;

③ 以PE为弦、$\frac{1}{2}\angle BAC$为圆周角作圆, 与AB相交于点G(取与A点较远的交点);

④ 由P、G两点所确定的直线与AC的交点为H, GH平分$\triangle ABC$的周长.

证明: 连结EG、EH, 因为$\angle PGE=\angle PAC$, 所以点A、G、E、H四点共圆, 于是$\angle DGE=\angle FHE$. 又因为$\angle EDG=\angle EFH=90°$, $ED=EF$, 所以$\triangle EDG\cong\triangle EFH$, 这样就得到$DG=FH$, 这样$AG+AH=AD+AF=\frac{AB+BC+AC}{2}$, 因此直线$GH$平分$\triangle ABC$的周长.

那么, GH平分$\triangle ABC$的面积吗?

因为P为$\triangle ABC$的内心, 所以令$\triangle ABC$的内切圆半径为r(即P点到$\triangle ABC$的三边的距离), 可得$S_{\triangle AGH}=\frac{1}{2}AG\cdot r+\frac{1}{2}AH\cdot r$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r$. 又因$AG+AH=\frac{AB+BC+AC}{2}$, 所以有$S_{\triangle AGH}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 故直线$GH$也平分$\triangle ABC$的面积.

综上所述, 三角形的周积平分线必过它的内心; 过三角形内心的一条直线平分周长也必然平分面积; 过三角形内心的一条直线平分面积也必然平分周长.

另外, 本文所阐述的过三角形内心平分周长的方法, 可以推广到: 过三角形内任意一点作平分周长的直线(提示: 如图4, P是$\triangle ABC$内任意一点, AE是$\angle BAC$的平分线, $\angle PGE=\angle EAC$), 这个问题留给读者验证.

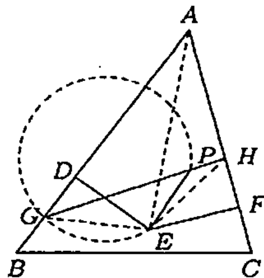


图 4

向量证法转化成纯几何证明

430079 湖北省武汉市华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心 彭翕成

笔者与张景中先生合著的《绕来绕去的向量法》一书出版后,收到不少读者的来信. 一位初中老师来信说: 向量法在解几何题时有其优势, 但需要用到平面向量基本定理、向量内积等知识, 虽然这些知识的难度不大, 初中生可以接受, 但毕竟超纲; 而学生进入高中之后, 却很少遇到平面几何题了, 向量法的优势难以显现.

针对这位教师的看法, 笔者认为最好是进行教材改革, 像上海地区一样在初中阶段学习向量. 而在教材没有改革之前, 向量法如何更大可能地发挥作用? 笔者进行了思考和探究.

解几何题, 关键在于辅助线的添加. 即使是解题经验十分丰富的老教师, 在做一道新题目时, 也不敢保证一次就能成功找出解题的辅助线, 只能凭经验去尝试. 通常, 辅助线只需简单地连结一两条线, 但有时就是这样折磨人, 在眼皮底下却看不出来.

经笔者研究发现, 向量法解几何题很大程度上能避免辅助线的添加, 因为不像纯几何方法那样需要构造全等或相似形. 这方面已经有大量例子(请参看《绕来绕去的向量法》). 其实, 向量法与纯几何证明并不是对立的. 本文将介绍如何利用向量解题引出辅助线的构造, 从而将向量证法转化成纯几何证明.

例1 如图1, 在直角$\triangle ABC$的斜边AB上向形外作正方形$ABPQ$. 设$\alpha=\angle ACQ$, $\beta=\angle QCP$, $\gamma=\angle PCB$, 证明

$\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\gamma$.

分析: 此题容易想到用余弦定理, $\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\gamma$等价于$\dfrac{CP^2+CQ^2-PQ^2}{2}$

$$=\frac{CA^2+CQ^2-AQ^2}{2CA}\cdot\frac{CB^2+CP^2-PB^2}{2CB},$$

接下来怎么办就让人为难了. 若使用向量内积形式, 则会给我们前进的提示. $\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\gamma$等价于$\dfrac{\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CP}}{CQ\cdot CP}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CQ}}{CA\cdot CQ}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}{CB\cdot CP}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CQ}$和$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}$的投影如何进行呢? 这启示我们可以作垂线段.

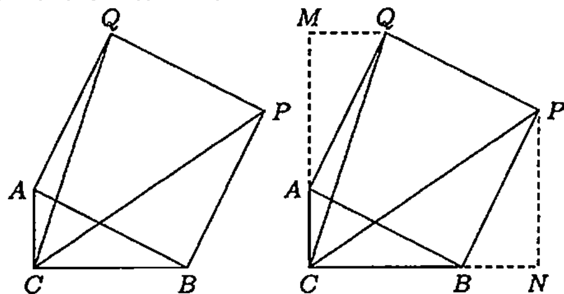


图1　　图2

证明: 如图2, 设点Q在CA上的投影为点M, 点P在CB上的投影为点N, 连结线段之后, 此时意外地出现了勾股弦图, 使得解题变得非常简单.

$\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\gamma$等价于

$$\frac{\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CP}}{CQ\cdot CP}=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CQ}}{CA\cdot CQ}\cdot\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}{CB\cdot CP},$$

化为$\dfrac{\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MQ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NP}\right)}{CQ\cdot CP}$

$$=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CQ}}{CA\cdot CQ}\cdot\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}}{CB\cdot CP},$$

化为$\dfrac{\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{CN}}{CQ\cdot CP}$

$$=\frac{CA\cdot CM}{CA\cdot CQ}\cdot\frac{CB\cdot CN}{CB\cdot CP},$$

化为$CM\cdot NP+MQ\cdot CN=CM\cdot CN$. 根据勾股弦图的性质, 此式显然成立.

转化成纯几何证明: 设$CB=a$, $CA=b$, 根据勾股弦图的性质,

$$\cos\alpha\cdot\cos\gamma=\frac{a+b}{CQ}\cdot\frac{a+b}{CP},$$

$$\cos\beta=\frac{CQ^2+CP^2-QP^2}{2CQ\cdot CP}$$

$$=\frac{a^2+(a+b)^2+b^2+(a+b)^2-a^2-b^2}{2CQ\cdot CP}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{CQ\cdot CP},$$

所以$\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos\gamma$.

例2 如图3, 过$\triangle ABC$顶点C作直线, 分别过点A、B向该直线作垂线段AG、BP, M是AB中点, 求证: $MP=MG$.

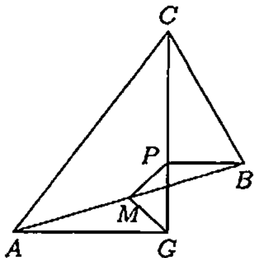


图3

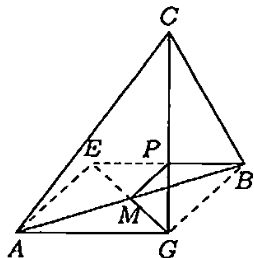


图4

证明: 要证$MP=MG$,

只需证$\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}\right)^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}\right)^2$,

即证$2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}^2=2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}^2$,

即证$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}^2$,

即证$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}$,

显然两者都等于$-AG\cdot BP$.

此证法完全避开了辅助线. 我们从另一个角度来证.

另证$\overrightarrow{MP}^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GP}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GP}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GP}$, 此时需证$\overrightarrow{GP}\cdot\left(2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GP}\right)=0$, 我们构造出$2\overrightarrow{MG}$来, 如图4, 延长$GM$至点$E$, 使得$ME=GM$, 则四边形$AGBE$是平行四边形, $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{MG}$, 而显然有$\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{EP}=0$, 命题成立.

转化成纯几何证法: 延长GM至点E, 使得$ME=GM$, 则四边形$AGBE$是平行四边形, $EG=2MG$, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 立刻可得$MG=MP$.

例3 如图5, 正方形$ABCD$中, E、F分别是CD、DA的中点, 设BE交CF于点P, 求证: $AP=AB$.

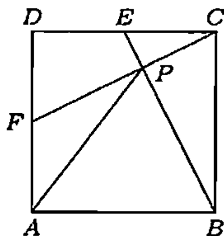


图5

证明: $\overrightarrow{AP}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BP}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$, 此时需证$\overrightarrow{BP}\cdot\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)=0$, 我们构造出$2\overrightarrow{AB}$来. 如图6, 设$CF$与$AB$两直线交于点$K$, 则$\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{AB}$, 而由$\triangle CDF\cong\triangle BCE$可得$\angle KPB=90°$, 于是$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{KP}=0$, 命题成立.

转化成纯几何证法: 设CF与AB两直线交于点K, 则$KB=2AB$. 由$\triangle CDF\cong\triangle BCE$可得$\angle KPB=90°$, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 立刻可得$AP=AB$.

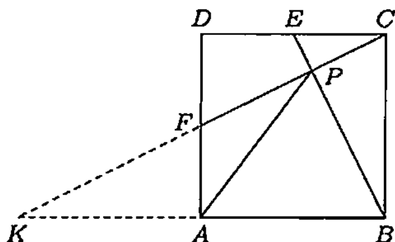


图6

此题有一变式: 如图5, 正方形$ABCD$中, F是AD中点, $BP\perp CF$交CF于点P, 求证: $AP=AB$. 此变式可推广到平行四边形.

例4 如图7, 平行四边形$ABCD$中, F是AD中点, $BP\perp CF$交CF于点P, 求证: $AP=AB$.

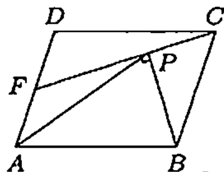


图7

证明: $\overrightarrow{AP}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BP}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$, 此时需证$\overrightarrow{BP}\cdot\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)=0$, 我们构造出$2\overrightarrow{AB}$来. 如图8, 设$AB$与$CF$两直线交于点$K$, 则$\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{AB}$, 而显然有$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{KP}=0$, 命题成立.

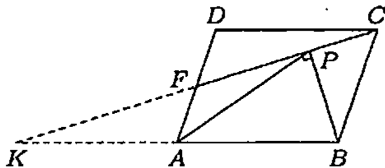


图8

转化成纯几何证法: 设AB与CF两直线交

于点K, 则$KB=2AB$, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 立刻可得$AP=AB$.

$\overrightarrow{BP}\cdot\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)=0$等价于$\overrightarrow{BP}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\right)=0$, 这可引出另一种辅助线.

另证: 如图9, 设BC中点为R, 连结AR, 则四边形$ARCF$是平行四边形, 由平行线的性质可得$AS\perp BP$, $PS=SB$, 所以$AP=AB$.

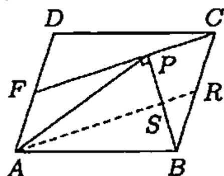


图 9

例5 如图10, 已知四边形$ABCD$, 点A和A_1关于点B对称, 点B和B_1关于点C对称, 点C和C_1关于点D对称, 点D和D_1关于点A对称.

(1) 点E、E_1、F、F_1分别是边BC、A_1B_1、AD、D_1C_1的中点, 求证: 四边形E_1EF_1F是平行四边形.

(2) 如果擦去A、B、C、D四点, 能否根据点A_1、B_1、C_1、D_1重新作出A、B、C、D四点.

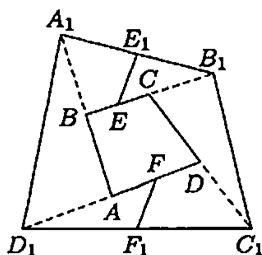


图 10

证明: 由向量形式的四边形中位线公式可得
$2\overrightarrow{EE_1}=\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1E_1}\right)+\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1E_1}\right)=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}$,
于是
$2\overrightarrow{EE_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{C_1D}=2\overrightarrow{F_1F}$, 所以四边形$E_1EF_1F$是平行四边形.

第(2)小题这样的作图题, 有时是不好入手的. 我们可以将向量的形式作一点变化. 例如M是AB中点, 用向量记就是$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 向量写成两点之差就是$M-A=B-M$, 移项得$A+B=2M$, 这就是质点法里的中点公式.

由点A_1、B_1、C_1、D_1和点A、B、C、D的关系可列式

$$\begin{cases}A_1+A=2B,\\B_1+B=2C,\\C_1+C=2D,\\D_1+D=2A.\end{cases}$$

显然由A、B、C、D推出A_1、B_1、C_1、D_1容易, 反之则要麻烦一些, 解方程的结果为:

$$\begin{cases}A=\frac{1}{15}A_1+\frac{2}{15}B_1+\frac{4}{15}C_1+\frac{8}{15}D_1,\\B=\frac{8}{15}A_1+\frac{1}{15}B_1+\frac{2}{15}C_1+\frac{4}{15}D_1,\\C=\frac{4}{15}A_1+\frac{8}{15}B_1+\frac{1}{15}C_1+\frac{2}{15}D_1,\\D=\frac{2}{15}A_1+\frac{4}{15}B_1+\frac{8}{15}C_1+\frac{1}{15}D_1.\end{cases}$$

这些表达式是什么意思呢? 以C为例, 如图11, 在A_1B_1上有点K, 且$\frac{4}{15}A_1K=\frac{8}{15}KB_1$, 即$K$是$A_1B_1$上靠近$B_1$的三等分点. 在$C_1D_1$上有点$M$, 且$\frac{1}{15}C_1M=\frac{2}{15}MD_1$, 即$M$是$C_1D_1$上靠近$D_1$的三等分点. 则$KM$上有点$C$, 且$\left(\frac{4}{15}+\frac{8}{15}\right)KC=\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right)CM$, 即$4KC=CM$, 即$C$是$KM$上靠近$K$的五等分点. 对质点法有兴趣的读者可参看《绕来绕去的向量法》.

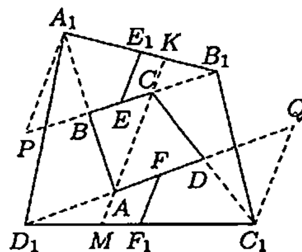


图 11

有了以上的探索, 转化成纯几何证法是十分简单的.

转化成纯几何证法: 第(1)小题证明的转化, 突破口是$2\overrightarrow{EE_1}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{F_1F}$.

如图11, 延长CB至点P使得$BP=CB$, 则$\triangle A_1BP\cong\triangle ABC$, 而$EE_1$是$\triangle A_1B_1P$的中位线, 所以$2EE_1 \mathrel{\underline{\parallel}} PA_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AC$. 同理延长$AD$至点$Q$使得$AD=DQ$, 可得$2F_1F \mathrel{\underline{\parallel}} C_1Q \mathrel{\underline{\parallel}} AC$, 所以四边形$E_1EF_1F$是平行四边形.

第(2)小题的作法: 在A_1B_1上作靠近B_1的三等分点K, 在C_1D_1上作靠近D_1的三等分点

椭圆涉及矩形的两个性质及引申

256200　山东省邹平县教育局教研室　姜坤崇

最近笔者认真阅读了文[1]、[2], 对其中讨论的一些问题作了深入思考, 得到了一些结论, 现将其整理成此文, 与大家交流. 本文先给出笔者思考文[1]所得的椭圆涉及矩形的两个性质, 然后将所得结论引申到圆及双曲线中去.

1. 椭圆涉及矩形的两个性质及其证明

在椭圆中有一个涉及矩形的性质(注: 将文[1]中研究的一个轨迹结论逆向化得到):

性质1　如图1, 给定椭圆Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, A、B是Γ长轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, 且$|AD|=|BC|=2b$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F, 则$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$.

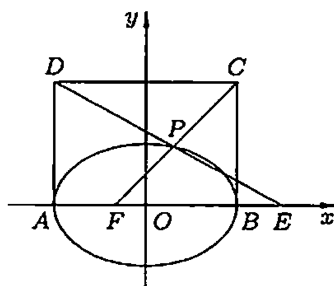


图1

另外, 文[1]给出了关于圆的如下结论(这里叙述略有改动):

性质2　设圆Γ: $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$与x轴交于A、B, 以AB为一边作矩形$ABCD$, 且$|AD|=|BC|=\sqrt{2}r$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F, 则$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$.

笔者经过探究发现关于圆的性质2对于椭圆也是成立的, 即有

性质3　如图1, 给定椭圆Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, A、B是Γ长轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, 且$|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F, 则$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$.

性质1与性质3是椭圆涉及矩形的两个优美结论, 由于它们的条件是类似的, 因而我们自然地提这样一个问题: 这两个结论中的式子有无联系? 笔者对此进行了研究, 发现性质1与性质3都源于椭圆的一个简单性质, 因而它们是有内在联系的, 证明如下:

性质1的证明: 如图2, 设$A(-a,0)$、$B(a,0)$、$P(x_0,y_0)\,(y_0\neq 0)$, 直线AP、BP的斜率分别为k_{AP}、k_{BP}, 则$b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$. 于是

$$k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

即$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{b^2}{a^2}$. ……………………………… ①

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

M, 在KM上作靠近K的五等分点, 这就是所求作的点C. 同理可作其他三点.

从上述解题案例中可以看出, 向量法与纯几何证明不仅不是对立的, 也不是简单地转化, 而是互相启发, 共同前进. 以往介绍各种解法的资料, 大多强调某种方法更好. 笔者认为, 研究各种解题方法的特点, 用其长处, 使得解题变得简单快捷, 这是很好的研究; 但从另一个角度来说, 与其相争, 不如合作. 特别是针对教学而言, 研究不同证法之间的相互转化很有意义. 老师可以先用学生还不会或不熟悉的知识先把题目解出来, 再转化成学生能够接受的方法. 俗话说: 要给学生一杯水, 老师要有一桶水. 向量法应该属于这一桶水之内.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

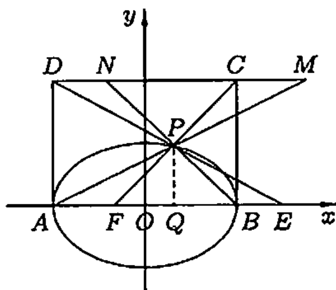


图2

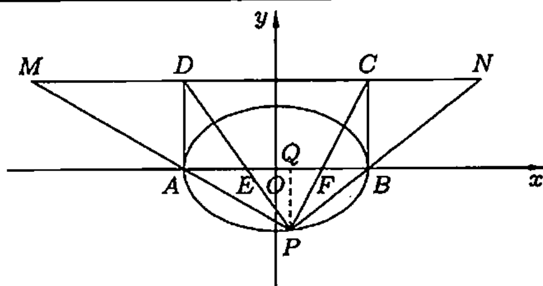


图3

作$PQ\perp x$轴, Q为垂足, 直线AP、BP分别交直线CD于点M、N, 则$\mathrm{Rt}\triangle APQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle MAD$, $\mathrm{Rt}\triangle BPQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle NBC$, 于是$\frac{|PQ|}{|AQ|}=\frac{|AD|}{|DM|}$, $\frac{|PQ|}{|BQ|}=\frac{|BC|}{|CN|}$. 又$k_{AP}\cdot k_{BP}<0$, $|AD|=|BC|=2b$, $|CD|=|BA|=2a$, 所以

$$① \Longleftrightarrow |k_{AP}|\cdot|k_{BP}|=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|PQ|}{|AQ|}\cdot\frac{|PQ|}{|BQ|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|AD|}{|DM|}\cdot\frac{|BC|}{|CN|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2b}{|DM|}\cdot\frac{2b}{|CN|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow |DM|\cdot|CN|=4a^2$$

$$\Longleftrightarrow |DM|\cdot|CN|=|CD|^2. \cdots\cdots ②$$

又$\triangle PAE\backsim\triangle PMD$, $\triangle PBF\backsim\triangle PNC$, $\triangle PFE\backsim\triangle PCD$, 且它们有相同的相似比(点$P$到$x$轴、直线$CD$的距离之比), 所以

② 式$\Longleftrightarrow |AE|\cdot|BF|=|EF|^2$.

至此完成了性质1的证明, 并且证明了在条件$|AD|=|BC|=2b$下, $|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$等价于 ① 式.

下面证明性质3中的$|AF|^2+|BE^2|=|AB|^2$在条件$|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$下也等价于 ① 式, 从而揭示出两个性质的内在联系.

性质3的证明: 如图2、3, 同性质1的证明得到 ① 式. 作$PQ\perp x$轴, Q为垂足, 直线AP、BP分别交直线CD于点M、N, 则$\mathrm{Rt}\triangle APQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle MAD$, $\mathrm{Rt}\triangle BPQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle NBC$,

于是$\frac{|PQ|}{|AQ|}=\frac{|AD|}{|DM|}$, $\frac{|PQ|}{|BQ|}=\frac{|BC|}{|CN|}$.

又$k_{AP}\cdot k_{BP}<0$, $|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$, $|CD|=|BA|=2a$, 所以

$$① 式 \Longleftrightarrow |k_{AP}|\cdot|k_{BP}|=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|PQ|}{|AQ|}\cdot\frac{|PQ|}{|BQ|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|AD|}{|DM|}\cdot\frac{|BC|}{|CN|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}b}{|DM|}\cdot\frac{\sqrt{2}b}{|CN|}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow |DM|\cdot|CN|=2a^2$$

$$\Longleftrightarrow 2|DM|\cdot|CN|=|CD|^2. \cdots\cdots ③$$

又$\triangle PAE\backsim\triangle PMD$, $\triangle PBF\backsim\triangle PNC$, $\triangle PFE\backsim\triangle PCD$, 且它们有相同的相似比, 所以 ③ 式$\Longleftrightarrow 2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$.

而$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$

$$\Longleftrightarrow \left|\overrightarrow{AF}\right|^2+\left|\overrightarrow{BE}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{BE}^2=\overrightarrow{AB}^2$$

$$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)^2+\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}\right)^2=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)^2$$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{EF}^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{FE}^2+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FB}^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}+2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}$.

因为$\overrightarrow{BF}^2=\overrightarrow{FB}^2$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{FB}$同向, 所以上式等价于

$2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FE}^2 \Longleftrightarrow 2\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FB}\right|=\left|\overrightarrow{FE}\right|^2 \Longleftrightarrow 2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$.

所以$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2 \Longleftrightarrow |AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$,

所以$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$等价于 ① 式.

综合性质1与性质3的证明, 实际上已给出了以下结论的证明:

定理1　给定椭圆Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, A、B是Γ长轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F.

(1)若$|AD|=|BC|=2b$, 则$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$;

(2)若$|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$, 则$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2\iff|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$.

由于椭圆有两条对称轴, 且每一条对称轴都与椭圆有两个交点(此性质与双曲线不完全相同), 故两条对称轴常常有相同或相似的性质, 将定理1中的长轴与短轴类比可得结论(证明从略):

定理2　给定椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, A、B是Γ短轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交y轴于点E、F.

(1)若$|AD|=|BC|=2a$, 则$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$;

(2)若$|AD|=|BC|=\sqrt{2}a$, 则$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2\iff|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$.

2. 椭圆结论在圆及双曲线中的引申

将椭圆中的结论(定理1)引申到圆及双曲线中可得(证明可仿定理1的证明进行, 从略):

定理3　设圆$\Gamma: x^2+y^2=r^2(r>0)$, 与x轴交于两点A、B, 以AB为一边作矩形$ABCD$, P是Γ上异于A、B的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F.

(1)若$|AD|=|BC|=2r$, 则$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$;

(2)若$|AD|=|BC|=\sqrt{2}r$, 则$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2\iff|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$.

定理4　给定双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, A、B是Γ实轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, P是Γ上异于A、B且不在直线CD上的任意一点, 直线DP、CP分别交x轴于点E、F.

(1)若$|AD|=|BC|=2b$, 则$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$;

(2)若$|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$, 则$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$.

说明: 在双曲线中, 若$|AD|=|BC|=\sqrt{2}b$, 则不再有$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$成立, 这是因为点E、F都在直线AD、BC所形成的带状区域之外, 因此$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{FB}$反向, 向量式$2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FE}^2$不成立, 即式子$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$与$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$不是等价的.

虽然以双曲线的实轴为一边所作的矩形中不能得到类似于椭圆中$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$的式子, 但以双曲线虚轴为一边所作的矩形却可以得到这样结构的一个式子(对文[2]中的性质3逆向化得到).

定理5　给定双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, A、B是Γ虚轴的两个端点, 以AB为一边作矩形$ABCD$, 且$|AD|=|BC|=\sqrt{2}a$, 点C、D在双曲线上, P是Γ上异于C、D的任意一点, 直线DP、CP分别交y轴于点E、F, 则

(1) $|AE|^2+|BF|^2=|EF|^2$;

(2)若点P在矩形$ABCD$内时, 有$2|AF|\cdot|BE|=|AB|^2\iff|AE|^2+|BF|^2=|EF|^2$.

证明: (1)设$A(0,-b)$、$B(0,b)$、$C(\sqrt{2}a,b)$、$D(\sqrt{2}a,-b)$、$E(0,y_E)$、$F(0,y_F)$、$P(x_0,y_0)$ $(x_0\neq\sqrt{2}a)$, 如图4, 则$b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0$.

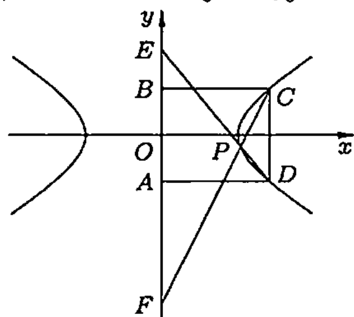


图4

由D、P、E三点共线可得$\frac{y_0-y_E}{x_0}=\frac{y_0+b}{x_0-\sqrt{2}a}$, 所以$y_E=\frac{\sqrt{2}ay_0+bx_0}{\sqrt{2}a-x_0}$. 同理$C$、$P$、$F$三点共线可得$y_F=\frac{\sqrt{2}ay_0-bx_0}{\sqrt{2}a-x_0}$. 于是

$$\begin{aligned}&|AE|^2+|BF|^2=(y_E+b)^2+(y_F-b)^2\\&=\left[\frac{\sqrt{2}a(y_0+b)}{\sqrt{2}a-x_0}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{2}a(y_0-b)}{\sqrt{2}a-x_0}\right]^2\\&=\frac{4a^2(y_0^2+b^2)}{(\sqrt{2}a-x_0)^2}=\frac{4b^2x_0^2}{(\sqrt{2}a-x_0)^2}\\&=(y_E-y_F)^2=|EF|^2,\end{aligned}$$

即$|AE|^2+|BF|^2=|EF|^2$.

(2) $|AE|^2+|BF|^2=|EF|^2$

$$\iff\left|\overrightarrow{AE}\right|^2+\left|\overrightarrow{BF}\right|^2=|\overrightarrow{EF}|^2$$

$$\iff\overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{BF}^2=\overrightarrow{EF}^2$$

$$\iff\overrightarrow{AE}^2+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}\right)^2=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AF}^2 =\overrightarrow{EA}^2+2\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AF}^2$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}$$

$$\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{AF}\cdot\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BA}^2$$

$$\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}^2.$$

因为点P在矩形$ABCD$内, 所以$\overrightarrow{AF}$与$\overrightarrow{EB}$同向, 于是

$$2\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}^2$$

$$\Longleftrightarrow 2\left|\overrightarrow{AF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$$

$$\Longleftrightarrow 2|AF|\cdot|BE|=|AB|^2.$$

故当点P在矩形$ABCD$内时, 有$|AE|^2+|BF|^2=|EF|^2 \Longleftrightarrow 2|AF|\cdot|EB|=|AB|^2$.

3. 几点有益的启示

通过以上问题的讨论, 我们得到以下几点的启示:

(1) 寻求两个数学对象、概念或命题等(统称为数学研究的问题)之间的内在联系是数学研究及教学的重要内容, 虽然数学问题千变万化、异彩纷呈, 但它们往往不是孤立存在的, 而是相互联系又可相互转化的, 有些数学命题之间还具有某种数学关系(因果关系、包含关系、等价关系等), 如果能将这些关系揭示出来, 那么无疑数学中的知识点及其脉络将变得清晰而有序, 许多看似毫不相关的问题其实却有着相同的生长点. 数学的有规律可寻, 特别是数学问题的既变化多端又“变中蕴含着不变、万变不离其宗”, 使人感到数学好玩、趣味无穷.

(2) 圆锥曲线中的许多结论其实就是平面几何中的结论的演变, 如定理1中的结论$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2$就是结论$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$(或$2|DM|\cdot|CN|=|CD|^2$)的演变结论. 用平面几何的知识不但可以证明有关解析几何中的结论, 更重要的是可以揭示问题的本质属性及某些结论之间的联系(如定理1证明中$2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$与$2|DM|\cdot|CN|=|CD|^2$的等价关系是通过相似三角形的性质获得的).

(3) 向量知识及方法的运用可以简化有关结论的证明, 如性质3中对于$|AF|^2+|BE|^2=|AB|^2 \Longleftrightarrow 2|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$的证明, 如果采用几何的方法进行, 则要分图1和图3两种情形分别给予证明.

(4) 在一定条件下, 解析几何中的许多曲线是满足某种几何条件的轨迹, 反过来, 这条曲线应具有这一几何条件阐述的性质, 如性质1中的椭圆可由满足几何条件$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$的矩形所生成, 反过来, 椭圆具有涉及矩形的一性质$|AE|\cdot|BF|=|EF|^2$. 因此由一个轨迹问题常常可得到解决轨迹曲线的一个性质, 反之亦然.

参考文献

[1] 张培强. 一道轨迹问题的展开探索[J]. 数学教学, 2011(5): 14-18.

[2] 林新建. 对费尔马问题的逆思考及其推广[J]. 数学教学, 2009(1): 16-17, 25.

(上接第3-4页)

其思路是清晰的, 即80年代末, 全美数学教师理事会犯了一个大错, 现在终于迷途知返了. 国家应该重新实施旧计划.

总之, 全美数学教师理事会已经被传统主义者团团围困, 并又给自己挖了个深坑往里跳. 再加上“不让一个孩子掉队”法令要求的技能考试, 这一切对倡导《标准》的人来说, 在短期内无疑会困难倍增.

4. 长远的观点

问题解决一定会以一种有意义的方式重新注入美国数学课程, 对此我们应该抱乐观的态度. 回想一下, “新数学”十年(当然本身确实有缺陷), 接着就是极端的反应“回到基础”. 最后“回到基础”又打了自己一个耳光, 十年基本技能教学, 未能使学生的技能超过先前, 特别是, 学生在问题解决上的表现尤其糟糕. 再后来, 问题解决自然成为课程的核心.

正如哲学家Santayana所说的那样, 不从历史中吸取教训的人注定会重蹈历史的覆辙. 美国的大部分地区已经又开始新一轮“回到基础”的运动了, 我们期待他们早日结束. 也许就像过去一样, 过份强调基本技能后, 他们才会更清楚到底该做什么. 与此同时, 问题解决的研究也日趋成熟, 一旦环境改变——这是必然的, 这些都可以指导下一轮的课程改革.

教师解数学题欠缺意识之忧

214031　江苏省无锡市第一中学　李广修

众所周知, 会数学不一定会教数学; 但数学功底不深厚的教师一定不会教好数学. 一些数学课之所以没有一条核心思想主线, 不讲"理", 大都是因为执教者自身的数学素养不高所致. 为了担负起教书育人的重任, 我们中学数学教师应该不断地提高数学素养, 不仅要对传统的数学知识有很好地理解和把握, 还要能知道一些近、现代数学知识、思想方法, 更进一层次, 从现代数学的高度和当代科技如计算机对数学的影响的角度审视、指导教学. 中学数学教师解答一些背景深刻、表达新颖、设问巧妙、体现现代数学知识、思想、方法的高考数学题, 有益于活跃思维, 体验解决难题的酸甜苦辣, 拓宽数学知识、方法视野, 可以提高数学素养和教学智慧. 现就一些数学教师解高考数学题所欠缺的意识作一些分析, 希望能激起些微波纹.

1. 质疑意识

例1　(2009年全国卷I理科第22题) 设函数 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 存在两个极值点 x_1、x_2, 且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$.

(I) 求满足 b、c 的约束条件, 并在下面的坐标平面内, 画出满足这些条件的点 (b,c) 的区域;

(II) 证明: $-10\leqslant f(x_2)\leqslant-\frac{1}{2}$.

剖析: 该题(II)的参考答案, 是通过函数 $f(x)$ 的极值点 x_1、x_2, 也就是导函数的零点, 解出用 c、x_2 表示 b 和 x_1 的表达式, 进而用 c、x_2 表示 $f(x_2)$, 最终由放缩不等式完成证明. 这种证明的方法因选择 x_1 和 c, 弃用 x_2 和 b 而显得不够对称、不够自然, 也因所选择的两个量 c、x_2 不独立而显得不够合理. 对于函数思想, 解答本题必须既要有寻求变量间对应关系的意识, 还要能合理地选择自变量, 才可能构建出比较简单的函数模型. 一般地, 对于一元二次方程, 当根的性状已知, 且两根独立时, 应该用根来表示其系数, 才较为合理、简单. 有些教师只是照搬参考答案, 不作思考, 这就不能不说这是缺少独立思考、质疑意识的表现.

简解: 由 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 得 $f'(x)=3x^2+6bx+3c$.

再由韦达定理得 $\begin{cases}-2b=x_1+x_2,\\ c=x_1x_2.\end{cases}$

于是 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(x_1+x_2)x^2+3x_1x_2x$,

$f(x_2)=x_2^3-\frac{3}{2}(x_1+x_2)x_2^2+3x_1x_2^2$

$=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3}{2}x_1x_2^2$.

因为 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$,

所以 $f(x_2)\leqslant-\frac{1}{2}x_2^3\leqslant-\frac{1}{2}$,

$f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}x_2^3-\frac{3}{2}x_2^2=-\frac{1}{2}(x_2^3+3x_2^2)\geqslant-\frac{1}{2}(2^3+3\times2^2)=-10$.

2. 求真意识

例2　(2009年全国高考浙江卷理科第15题) 观察下列等式:

$C_5^1+C_5^5=2^3-2$,

$C_9^1+C_9^5+C_9^9=2^7+2^3$,

$C_{13}^1+C_{13}^5+C_{13}^9+C_{13}^{13}=2^{11}-2^5$,

$C_{17}^1+C_{17}^5+C_{17}^9+C_{17}^{13}+C_{17}^{17}=2^{15}+2^7$,

$\cdots$

由以上等式推测到一个一般的结论: 对于 $n\in\mathbf{N}^*$, $C_{4n+1}^1+C_{4n+1}^5+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=$______.

剖析: 运用归纳的方法得出 $C_{4n+1}^1+C_{4n+1}^5+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=2^{4n-1}+(-1)^n2^{2n-1}$ 并不很困难, 但一些教师止步于获得结论而不去探求这个结论的真假, 这就表明了这些教师的求真意识还不够很强. 尽管探求这个结论的真假不是考题应有之义, 但对于归纳得出的结论进行证实或证伪, 是数学教师应该有的意识和行动.

证明结论 $C_{4n+1}^1+C_{4n+1}^5+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=2^{4n-1}+(-1)^n2^{2n-1}$ 为真的思路: 考虑到 C_{4n+1}^1,

$C_{4n+1}^{5}, \cdots, C_{4n+1}^{4n+1}$的上标1, 5, $\cdots$, $4n+1$间隔为4, 加之是求其和, 它和复数的二项式展开有密切联系, 于是产生通过对$(1+\mathrm{i})^{4n+1}$ (i为虚数单位)算两次而得到结论的念头. 事实上, 一方面$(1+\mathrm{i})^{4n+1}=(C_{4n+1}^{0}-C_{4n+1}^{2}+C_{4n+1}^{4}-\cdots+C_{4n+1}^{4n})+(C_{4n+1}^{1}-C_{4n+1}^{3}+C_{4n+1}^{5}-\cdots+C_{4n+1}^{4n+1})\mathrm{i}$, 另一方面$(1+\mathrm{i})^{4n+1}=(1+\mathrm{i})[(1+\mathrm{i})^4]^n=(1+\mathrm{i})(-4)^n=(-4)^n+(-4)^n\mathrm{i}$, 由复数相等得$C_{4n+1}^{1}-C_{4n+1}^{3}+C_{4n+1}^{5}-\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=(-4)^n$. ……①

又由二项展开式的偶数项二项式系数之和性质得$C_{4n+1}^{1}+C_{4n+1}^{3}+C_{4n+1}^{5}+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=2^{4n}$. ……②

由①和②得$C_{4n+1}^{1}+C_{4n+1}^{5}+\cdots+C_{4n+1}^{4n+1}=2^{4n-1}+(-1)^n2^{2n-1}$.

3. 求简意识

例3 (2006年全国高考江苏卷第20题)设a为实数, 记函数$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值为$g(a)$.

(I)设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, 求t的取值范围, 并把$f(x)$表示为t的函数$m(t)$;

(II)求$g(a)$;

(III)试求满足$g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$的所有实数$a$.

剖析: 对于该题(III)的解答, 当年不少学生讨论了9种情况, 参考答案也讨论了6种情况. 为了培养学生分类解答复杂问题的能力, 该题面世后便受到了许多高三数学教师的青睐, 然而面对繁琐、复杂的讨论, 一些教师几年来都是使用参考答案给学生作示范而没有推出新解法, 这不能不说是一件憾事. 参考答案解法显示为先考虑a和$\frac{1}{a}$的函数值, 再考虑解方程$g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$. 由于

$$g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\frac{1}{2},\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2},\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$$

是一分段函数, 这必然就要去先讨论a和$\frac{1}{a}$是属于三个区间

$$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]、\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right]、\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

的哪一个区间, 才能确定它们的函数值是什么, 从而难以避免讨论的复杂性. 而先从问题的整体性分析再考虑下一步该怎么做, 也是一般的寻找解题思路的方式.

我们先考虑函数$g(a)$的性质, 比如画函数$g(a)$的图象(如图1); 或分析$g(a)$的来源$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的结构特征, a的系数$\sqrt{1-x^2}$非负, 就会发现$f(x)$的最大值$g(a)$广义增. 它的证明也不算难, 设$a_1<a_2$, 记

$$f_1(x)=a_1\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x},$$
$$f_2(x)=a_2\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}.$$

又设$f_1(x)$在$x=m\ (-1\leqslant m\leqslant 1)$时取得最大值, 由于$a$的系数非负, 故$f_1(x)_{\max}=f_1(m)\leqslant f_2(m)\leqslant f_2(x)_{\max}$, 即$g(a)$不会变小.

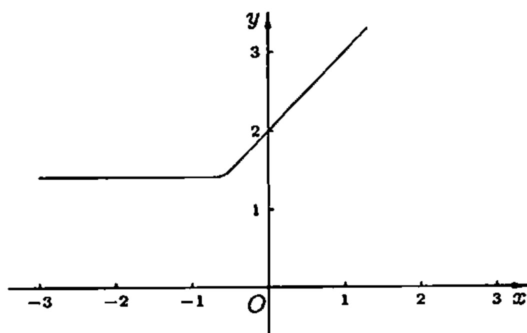


图1

这一在多年跨度内未能稍加改变繁杂解法的事实是值得反思的.

简解: 由$g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\frac{1}{2},\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2},\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

在$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调增, 且对于任意的$x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y>-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 都有$g(x)<g(y)$, $g(a)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$上为常数, 由$g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$, 立得$\begin{cases}a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 或$a=\frac{1}{a}$, 故实数a的取值范围是$\left\{a\left|-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\right.\text{或}a=1\right\}$.

4. 批判意识

例5 (2010年全国高考福建卷文科第16题)观察下列等式:

① $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

② $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$;

③ $\cos 6\alpha = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1$;

④ $\cos 8\alpha = 128\cos^8\alpha - 256\cos^6\alpha + 160\cos^4\alpha - 32\cos^2\alpha + 1$;

⑤ $\cos 10\alpha = m\cos^{10}\alpha + 1280\cos^8\alpha + 1120\cos^6\alpha + n\cos^4\alpha + p\cos^2\alpha + 1$;

可以推测, $m - n + p =$ __________.

剖析: 由于题目是合情推理的"类比型", 于是一些教师把它作为合情推理题来做, 做得很辛苦. 为什么解法要套题型, 又为什么要根据题目的形式去限定解法? 看来, 还是批判意识不够强.

解: $\cos 10\alpha = \cos(8\alpha + 2\alpha) = \cos 8\alpha\cos 2\alpha - \sin 8\alpha\sin 2\alpha$, ··············· ①

$\cos 6\alpha = \cos(8\alpha - 2\alpha) = \cos 8\alpha\cos 2\alpha + \sin 8\alpha\sin 2\alpha$, ··············· ②

①+②得 $\cos 10\alpha + \cos 6\alpha = 2\cos 8\alpha\cos 2\alpha$,

$$\cos 10\alpha = 2\cos 8\alpha\cos 2\alpha - \cos 6\alpha$$
$$= 2(128\cos^8\alpha - 256\cos^6\alpha + 160\cos^4\alpha - 32\cos^2\alpha + 1)(2\cos^2\alpha - 1) - \cos 6\alpha$$
$$= 512\cos^{10}\alpha + \cdots - 400\cos^4\alpha + 50\cos^2\alpha + \cdots,$$

于是 $m - n + p = 962$.

5. 创新意识

例5 (2011年全国高考江苏卷第13题) 设 $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_7$, 其中 a_1、a_3、a_5、a_7 成公比为 q 的等比数列, a_2、a_4、a_6 成公差为1的等差数列, 则 q 的最小值是______.

剖析: 对于本题, 有些教师受题目中的数列、字母、数的大小、公比等背景限制, 只在数上运作. 而我们如果能够用数形结合以及整体化思想来指引解决这道题, 就显得独树一帜. 从几乎没有几何背景的问题中构建出几何模型就有了创新韵味.

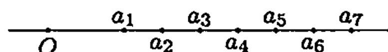


图 2

将这7个数用数轴上的7个点来表示, 最外层两点 a_1 与 a_7 间距离 $q^3 - 1$ 不小于里层的两点 a_2 与 a_6 两个点间距离2, 即 $q^3 - 1 \geqslant 2, q \geqslant \sqrt[3]{3}$. 当 $q = \sqrt[3]{3}$ 时, 取 $a_2 = 1, a_7 = a_6 = q^3 = 3, a_3 = \sqrt[3]{3}, a_4 = 2, a_5 = \sqrt[3]{9}$, 满足题设, 故 q 的最小值是 $\sqrt[3]{3}$.

用这种方法还可以求 q 的最大值. 由两点 a_2 与 a_6 的距离不小于 a_3 与 a_5 的距离, 得 $2 \geqslant q^2 - q, q \leqslant 2$, 当 $q = 2$ 时, 取 $a_2 = a_3 = 2, a_5 = a_6 = 4, a_4 = 3, a_7 = 8$, 又 $a_1 = 1$, 满足题设, 所以 q 的最大值是2.

在数轴上处理数列的不等问题有美妙之处, 这样的方法还可以迁移到求 q 的最大值, 就更有些美妙了.

上面列举了数学教师在解答高考数学题时所欠缺的一些意识, 很是让人忧虑. 我们需要认识到简单地、独特地、创新地去求解一些高考数学题, 想出一些新奇的方法, 先发散地想、独立地做, 不看参考答案, 免得思维懒惰或思路打不开, 冒一些合理的风险, 允许自己在标新立异求解时犯错误, 这不仅是在提高数学教学素养, 更新、优化数学认知结构, 也是在进一步培养探索精神、养成实事求是的科学态度和创新意识, 提高思辨分析、严谨推理的能力, 增加对数学的情感, 更是对学生创新能力的提高起到潜移默化的作用. 教师没有研究, 谈何教学创新; 教师没有教学创新, 谈何有自己的独特见解引领学生创新. 目前, 学生的创新意识不强、理性思维水平不高, 扪心自问, 我们教师有一定的责任. 时下数学教学"满堂灌"、"广种薄收"现象还很多, 教师很少有时间停下来带领学生去想一想、探一探, 学生的大脑被教师抛出的题型、解法塞得满满的, 几乎没有自由思考空间, 这与教师占有解题的思想方法高度不够, 运用解题方法不精当有一定关联. 我们还应该辩证地认识到, 教师极度地喜爱解题, 解题水平很高, 也可能会把数学教学异化为纯粹解题教学, 把解题教学异化成题型教学, 把一些学生不易想到的不熟悉的方法当作学生已经驾轻就熟了的方法, 拔高解题教学起点, 削弱解题思路的分析. 对于这样的一些问题, 我们需要认真地审视、反思、纠偏.

数学期望与卡塔兰(Catalan)数

100048 首都师范大学初等教育学院 石冶郝 程小红

1. 引言

文[1]讨论了重复性赛制问题的数学模型, 并证明"$2n-1$局n胜"制是一种公平的比赛, 重点研究比赛局数的相关概率分布问题.

本文侧重探讨"$2n-1$局n胜"制下比赛局数的数学期望, 它的计算公式和经典的卡塔兰(Catalan)数有关. 在比赛双方实力相当的情形下, 数学期望有更简洁的表示. 应用数学期望的公式, 可以对比赛场数进行预测.

用$E_n(\xi)$表示在"$2n-1$局n胜"$(n=1,2,\cdots)$制下比赛局数ξ的数学期望.

本文的主要结果是

定理 设甲每局胜的概率为p, 乙每局胜的概率为q, 比赛规则是"$2n-1$局n胜"制, 则

$$E_n(\xi)=n\sum_{k=0}^{n-1}C_k(pq)^k,\text{ 其中 }C_k=\frac{1}{k+1}C_{2k}^k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{(2k)!}{k!\cdot k!}\ (k=0,1,2,\cdots)$$

是第$k+1$个卡塔兰数.

例如比赛采用七局四胜制, 则数学期望 $E_4(\xi)=4(1+pq+2p^2q^2+5p^3q^3)$. 特殊地, 当$p=q=\frac{1}{2}$时, $E_4(\xi)=5.8125$, 则可估计比赛结束时需赛6场.

多局决胜的目的通常是减少偶然因素对比赛结果的影响, 使得比赛的结果能更好地反映双方的真实水平. 在桥牌比赛中, 如果仅仅凭一手牌定输赢, 显然是荒谬的. 然而某些现实因素经常使得多局决胜不可行. 如在职业拳击赛中, 比赛场次过多会严重损伤运动员的身体; 在世界杯足球赛中, 如果采取多局决胜制, 比赛结果反映的可能不是双方的球艺水平, 而是身体的耐力. 面临实际的抉择时, 概率的理由往往让位一些更现实的考虑, 赛程的长短必须合理, 必须保证对参赛者和观众的吸引力.[2]

2. 卡塔兰(Catalan)数

卡塔兰序列(取名于比利时数学家E. C. Catalan (1814 ~ 1894))即序列$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n,\cdots$, 其中$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$为第$n+1$个卡塔兰(Catalan)数. 前10个卡塔兰数为1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862. 卡塔兰数为组合数学中的一个重要计数函数, 可以同著名的斐波那契数列相媲美. 中国清代蒙古族数学家明安图是卡塔兰数的首创者[3], 他在18世纪三、四十年代先于欧拉(1758年)和卡塔兰(1838年)提出并应用了这一序列, 不但应用它解决幂级数展开问题, 而且还给出了卡塔兰数的一个几何模型. 1838年卡塔兰提出并解决了下面问题: n个有固定顺序的因子, 例如$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 在两个相邻因子间连续作乘法, 如何确定不同的求积方法数?[4] 卡塔兰得到方法数是C_{n-1}. 若取$n=4$, 四个有固定顺序的因子a,b,c,d, 则$C_3=5$, 五种不同结合方法是$((a(bc))d)$、$(((ab)c)d)$、$((ab)(cd))$、$(a(b(cd)))$、$(a((bc)d))$[3]. 经过众多学者深入研究, 卡塔兰数有许多的组合背景[5].

3. 数学期望的计算

甲、乙进行某项比赛, 设甲每局胜的概率为p, 乙每局胜的概率为q, $p+q=1$, 每场比赛彼此独立, 比赛中没有和局, 比赛规则是"$2n-1$局n胜"制, 即先胜n局的一方获胜, 比赛结束. 甲(乙)最终胜出时, 进行比赛的局数ξ的可能取值为$n,n+1,n+2,n+3,\cdots,2n-1$, 事件"$\xi=k$"表示前$k-1$局比赛中有一方先胜$n-1$局且第$k$局比赛仍胜, 于是比赛局数$\xi$的分布列为$P(\xi=k)=C_{k-1}^{n-1}p^nq^{k-1-(n-1)}+C_{k-1}^{n-1}q^np^{k-1-(n-1)}$.

由数学期望的定义

$$\begin{aligned}E_n(\xi)&=\textstyle\sum_{k=n}^{2n-1}kC_{k-1}^{n-1}(p^nq^{k-n}+p^{k-n}q^n)\\&=\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(n+k)C_{n+k-1}^{n-1}(p^nq^k+p^kq^n)\\&=n\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{k}(p^nq^k+p^kq^n),\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

因此 $\frac{E_{n+1}(\xi)}{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1+k}^{k}[p^nq^k(1-q)+p^kq^n(1-p)]=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1+k}^{k}(p^nq^k+p^kq^n)-\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1+k}^{k}(p^nq^{k+1}+p^{k+1}q^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+k}^{k}(p^nq^k+p^kq^n)+\sum\limits_{k=1}^{n}C_{n+k}^{k-1}(p^nq^k+p^kq^n)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}C_{n+k}^{k-1}(p^nq^k+p^kq^n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{k}(p^nq^k+p^kq^n)+2C_{2n}^{n}p^nq^n-C_{2n+1}^{n}p^nq^n=\frac{E_n(\xi)}{n}+\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}p^nq^n$,

显然 $E_1(\xi)=1$, 故 $\frac{E_n(\xi)}{n}$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{E_{k+1}(\xi)}{k+1}-\frac{E_k(\xi)}{k}\right)+E_1(\xi)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_k(pq)^k,$$

因此 $E_n(\xi)=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_k(pq)^k$, 其中 $C_k=\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}, k=0,1,2,\cdots$.

在双方实力相当的情形下, 数学期望有更简洁的表示.

推论　当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时,

$$E_n(\xi)=2n\left[1-C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right].$$

证明: 由定理的证明推导(1)式,

当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时,

$$E_n(\xi)=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{k}(p^nq^k+p^kq^n)$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{2}E_n(\xi)=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}, \cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) − (3) 错位相减得

$$\frac{1}{2}E_n(\xi)=n\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(C_{n+k}^{k}-C_{n+k-1}^{k-1})\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}-C_{2n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=n\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k-1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}-C_{2n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=n\left[1-C_{2n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right].$$

最后一个等式由分布列的性质

$$\sum_{k=n}^{2n-1}P(\xi=k)=\sum_{k=n}^{2n-1}C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1,$$

得 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n+k-1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}$$

$$=\sum_{k=n}^{2n-1}C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

所以 $E_n(\xi)=2n\left[1-C_{2n-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right]$

$$=2n\left[1-C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right].$$

说明: 当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时, 数学期望取最大值, 即 $E_n(\xi)=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$=2n\left[1-C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$$

为可能比赛局数的最大值.

按体育常识理解, 势均力敌的双方实力不分伯仲, 比赛数回合仍难解难分.

当 $p=0$ 或 $q=0$ 时, $E_n(\xi)=n$ 为可能比赛局数的最小值. 若双方实力相差悬殊, 比赛几无悬念，强势的一方以压倒性优势速战速决结束了比赛.

参考文献

[1] 沙峰, 杨益民. 重复性赛制中的数学问题[J]. 数学通报, 2007(9): 39-40.

[2] [英]约翰黑格著. 李大强译. 机会的数学原理[M]. 吉林人民出版社, 2001.

[3] 罗见今. 明安图是卡塔兰数的首创者[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1988(2): 239-245.

[4] 刘建军. 明安图与Catalan数[J]. 数学研究与评论, 2002, 22(4): 589-594.

[5] 刘芹英. 经典Catalan数的组合背景[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2003, 33(1): 121-124.

适度平面几何化, 优化解题过程

215003 江苏省苏州市第四中学 管新华 夏 蝉

解析几何是用代数方法研究几何问题的学科, 人们在讨论解析几何问题时较少考虑几何图形本身的几何性质的逻辑联系, 如何充分发挥这些几何性质的在推理中的作用是本文要研究的问题.

一、借助平面几何知识简化题解

例1 (2011年北大保送生试题) 已知$\triangle ABC$是圆$x^2+y^2=1$的内接三角形. $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 且$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$. 求证

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}.$$

证明: 因为$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=0$, $\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=0$, 说明$\triangle ABC$的重心为原点$O(0,0)$, 原点又是$\triangle ABC$外接圆的圆心——外心. 根据平面几何知识, 外心、重心合一的三角形必是正三角形, 故$\triangle ABC$为正三角形.

如图1, 连结OA、OB、OC, 则$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$. 若设$A(\cos\theta,\sin\theta)$, 则$B(\cos(\theta+120°),\sin(\theta+120°))$、$C(\cos(\theta+240°),\sin(\theta+240°))$, 则

$$\begin{aligned}&x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+120°)+\cos^2(\theta+240°)\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos(2\theta+240°)\\&\quad+\frac{1}{2}\cos(2\theta+120°)\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2\theta+2\cos(2\theta+180°)\cos 60°]=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

于是$y_1^2+y_2^2+y_3^2=1-x_1^2+1-x_2^2+1-x_3^2=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. 故命题成立.

例2 (2008年全国高考江苏省试题) 在平面直角坐标系xOy中, 设$\triangle ABC$的顶点分别为$A(0,a)$、$B(b,0)$、$C(c,0)$, 点$P(0,p)$为线段AO上的一点 (异于端点), 这里a、b、c为非零常数.

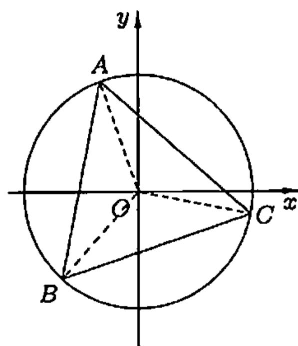


图1

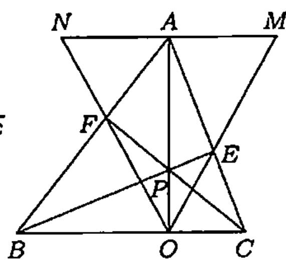


图2

如图2, 设直线BP、CP分别与边AC、AB交于点E、F, 某同学已正确求得直线OE的方程

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0.$$

请完成直线OF的方程: (__)$x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

解: 联想到平面几何题 (例如垂足三角形), 过点A作BC的平行线与OE、OF的延长线分别交于点M、N, 则$\triangle ANF\backsim\triangle BOF$, $\triangle AEM\backsim\triangle CEO$, 则$\frac{AN}{BO}=\frac{AF}{FB}$, $\frac{OC}{AM}=\frac{CE}{EA}$, 于是

$$\frac{AN}{AM}=\frac{AF\cdot BO\cdot CE}{FB\cdot OC\cdot EA}=1\ (\text{西瓦定理}),$$

即$AN=AM$. $AO\perp MN$. 故$\triangle OMN$为等腰三角形, 所以$\angle AON=\angle AOM$. 则$\angle COE=\angle BOF$, 也就是说直线OE、OF的倾角互补, 所以$k_{OE}+k_{OF}=0$. 故题中填空横线上应填上$-\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$.

评说: 上述两例充分应用了平面几何的相关知识, 有机地融入解析几何于解题中. 例2的得分率不高. 因字母计算能力不强, 即使算对了, 也耗时太多. 平面几何知识的应用, 不用计算, 自然而然地解决了问题.

二、借助平面几何证明中的思想方法简化题解

平面几何解题总的说来是综合法, 但也有它

自身的思想方法, 如添加辅助线, 找四点共圆,面积法等等. 利用这些方法会收到理想的效果.

例3 $\triangle ABC$中BC边、AB及AC的延长线与椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\,(a>b>0)$分别切于点$D$、$F$、$E$, 则$\dfrac{FA}{AE}\cdot\dfrac{EC}{CD}\cdot\dfrac{DB}{BF}=1$.

证明: 如图3, 连结OB、OC、OD、OE、OF、OA、DE、DF、EF.

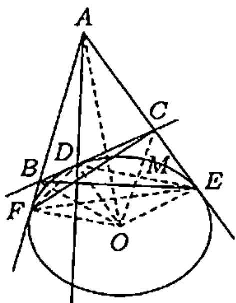


图 3

若$D(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$、$E(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2)$, 则过$D$、$E$两点的椭圆切线方程分别为

$$\begin{cases} bx\cos\theta_1+ay\sin\theta_1=ab,\\ bx\cos\theta_2+ay\sin\theta_2=ab,\end{cases}$$

解得两切线交点C的坐标

$$C\left(\frac{a\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}},\frac{b\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right),$$

所以$k_{OC}=\dfrac{b\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{a\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}$,

设DE的中点为M, 则点M的坐标为$\left(\dfrac{a(\cos\theta_1+\cos\theta_2)}{2},\dfrac{b(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}{2}\right)$.

又$k_{MO}=\dfrac{b(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}{a(\cos\theta_1+\cos\theta_2)}=\dfrac{b\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}{a\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ $=k_{OC}$, 故O、M、C三点共线, 即OC平分DE.

同理OA平分EF, OB平分DF, 由以上结论知, $S_{\triangle OBF}=S_{\triangle OBD}$, $S_{\triangle OAF}=S_{\triangle OAE}$, $S_{\triangle OCD}=S_{\triangle OCE}$,

则 $\dfrac{FA\cdot EC\cdot DB}{AE\cdot CD\cdot BF}=\dfrac{FA\cdot EC\cdot DB}{BF\cdot AE\cdot CD}$
$=\dfrac{S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle OBF}}\cdot\dfrac{S_{\triangle OCE}}{S_{\triangle OAE}}\cdot\dfrac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OCD}}=1.$

本例明显的解题方法是利用面积法, 而面积法是平面几何解题系统中特独的解题方法和思想. 它有广泛的普适性, 解析几何解题不妨也借来攻玉.

例4 (2010年河南省高中数学联赛题) P是抛物线$y^2=2x$上的动点, B、C在y轴上, 圆$(x-1)^2+y^2=1$内切于$\triangle PBC$, 求$\triangle PBC$面积的最小值.

解: 如图4, 设$P(m,n)$, 则$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}|BC|m$.

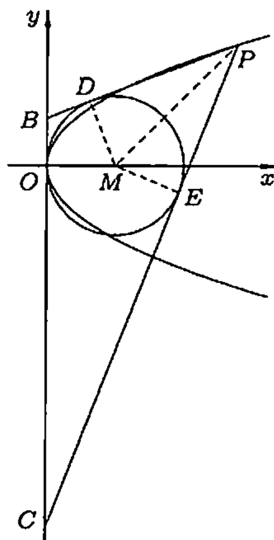


图 4

设PB、PC边上的切点分别为D、E, 则

$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}(|BC|+|PB|+|PC|)\cdot 1=|BC|+|PD|$, 且 $PD^2=(m-1)^2+n^2-1=m^2-2m+n^2=m^2$, 则$|PD|=m$.

所以 $S_{\triangle PBC}=|BC|+m$, 由上面$S_{\triangle PBC}$的两个面积表达式得 $\frac{1}{2}|BC|m=|BC|+m$.

由此得$|BC|=\dfrac{2m}{m-2}\,(m>2)$, 故得

$$\begin{aligned} S_{\triangle PBC}&=\frac{2m}{m-2}+m\\ &=\frac{4}{m-2}+(m-2)+4\\ &\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{m-2}\cdot(m-2)}+4=8. \end{aligned}$$

当且仅当$(m-2)^2=4$即$m=4$时$(n=\pm2\sqrt{2})$, $(S_{\triangle PBC})_{\min}=8$.

此题的标准答案没有应用三角形面积公式$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r_{切}$, 显得冗繁. 如果改用上述利用面积算两次的方法, 将大大简化题解.

三、充分应用圆锥曲线的本身几何性质简化解题

例5 (根据北大保送生试题改编)若圆锥曲线$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. 焦点F, 相应的准线l与对称轴交点为M, 过F的弦AB, 离心率为e, 则

$$\tan\angle AMB=\frac{2e\sin\angle AFx}{1-e^2\sin^2\angle AFx}.$$

证明: 如图5, 过点A、B分别作$AD\perp l$于点D, $BC\perp l$于点C. 又过点A、B分别作对称轴的垂线, 垂足分别为E、G. 设$\angle AFE=\alpha$, $\angle AMB=2\theta$, 则$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

由$AD/\!/MF/\!/BC$, 得$DM:MC=AF:FB$. 又$AF:AD=BF:BC=e$, 故$AF=eAD$, $BF=eBC$. 代入前面的比例式得

$DM:MC=AD:BC$, 且$AD\perp DM$, $BC\perp CM$, 则 $\mathrm{Rt}\triangle ADM\backsim\mathrm{Rt}\triangle BCM$.

所以$\angle AMD=\angle BMC$, 由此知$\angle AMF=\angle BMF=\theta$. 因此$\tan\theta=AE:ME=AE:AD$.

又$AE=AF\cdot\sin\alpha$, 可得$\tan\theta=(AF:AD)\sin\alpha=e\sin\alpha$. $\tan 2\theta=\dfrac{2e\sin\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha}$.

应注意(1)当$e=1$时, 为抛物线的结论;

(2)当$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时, 对抛物线来说$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 而对椭圆、双曲线仍成立.

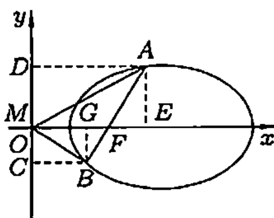


图5

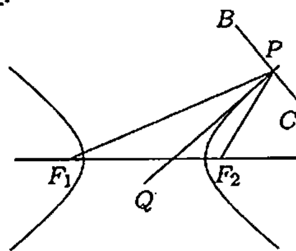


图6

例6 (2011年北大保送生考题)若P是双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\,(a、b>0)$上一点, 两焦点是$F_1$、$F_2$, 过点$P$作双曲线的切线$PQ$, 求证$PQ$必平分$\angle F_1PF_2$.

证明: 如图6, 过点P作PQ的垂线BC, 根据双曲线的光学性质知, F_1射出的光线经P点由BC反射, 则反射线光线必经过点F_2, 则$\angle BPF_1=\angle CPF_2$, 由此推知$\angle F_1PQ=\angle F_2PQ$, 即$PQ$平分$\angle F_1PF_2$.

圆锥曲线本身有丰富的几何性质, 如圆锥曲线定义就蕴含了较多的几何性质, 又如光学性质是圆锥曲线得天独厚的美妙性质. 例5、例6正是应用了这些性质而取得简洁的解题效果.

解析几何解题的主要方法是代数方法, 但如果能适度平面几何化, 则必能获得巧妙的解题方法, 我们没有理由不接受它! 有人曾设想建立圆锥曲线的几何性质的逻辑体系(文[1]、[2]、[3]), 这三本书均以综合法展示圆锥曲线性质, 但没有几何原本那样顺畅, 加上语言艰涩, 故没有能广泛流传. 笔者认为能否在解析法的框架内把圆锥曲线几何性质也理顺为象平面几何那样的逻辑系统, 可能解析几何会变得妙趣横生.

参考文献

[1] Robert William Griffin著. 黄泰译. 抛物线、椭圆、双曲线之几何学的讨论[M]. 南京: 南京正中书局, 1937年.

[2] 董涤尘. 初等几何学——圆锥曲线[M]. 商务印书馆, 1940年.

[3] Durell. C. V. A concise geometrical conics, 1926年.

(上接第3-6页)

学习各种临近领域学科, 如: 物理、计算机等也有着不可或缺的重要作用. 通过学习初中数学教科书立体几何内容——现实问题的分析, 可以帮助学生更好地建立平面几何与立体几何的关联, 为学好下一部分知识作好铺垫, 同时为初中数学向高中数学过渡奠定了一个直观的基础.

日本初中数学教科书立体几何内容有更多的探究和延伸的空间, 由已知平面推理出未知的空间图形过程, 有利于学生的更深层次的学习, 可为学生营造更广阔的学习空间, 学习自己感兴趣的东西, 同时提高教学质量进而达到教育目的.

参考文献

[1] 代钦, 李春兰. 初等几何问题解决教学研究[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2010.

[2] 日本新版中学校数学教科书一年级[M]. 东京: 大日本印刷株式会社, 2010.

[3] 日本中学校数学学习指导要领解说[M]. 东京: 大日本印刷株式会社, 2008.

[4] 平冈贤治, 今冈光范. 高校の图形指导における——考察[C]. 冈山大学: 日本数学教育学会(年会), 2004(37).

编制概率试题需慎重

313000　浙江省湖州二中　沈　恒

概率进入高中数学已经很多年, 随着教学的深入, 编题者也在加深概率试题的难度和拓广广度.

近年来, 各地模拟卷中编制不严密的概率试题层出不穷, 这些题目并不适合学生学习的要求, 甚至混淆了教材和考纲对概率问题的考查要求, 盲目拔高. 本文就这些问题来一个"吹毛求疵", 以求此类问题的命题可以做到完美.

1. 典型错误举例

例1　(苏教版教材必修3第98页习题8) 有红、黄、蓝三种颜色的小旗各3面, 任取其中3面挂于一根旗杆上, 求:

(1) 三面旗子全是红色的概率;

(2) 恰有两面旗子是红色的概率.

解答1 (标准答案): (1) 共有3^3种挂法, 3面皆红的概率为$\frac{1}{27}$;

(2) 恰有两面红色的概率为$\frac{C_3^2\cdot 2}{27}=\frac{2}{9}$.

解答2: 所有的旗子均不相同, 则挂法总数为A_9^3种.

(1) 全红色的基本事件为A_3^3种, 因此3面皆红的概率为$\frac{A_3^3}{A_9^3}=\frac{1}{84}$;

(2) 恰有两红的基本事件为$C_3^2\cdot C_6^1\cdot A_3^3$种, 因此恰有两面红色的概率为$\frac{C_3^2\cdot C_6^1\cdot A_3^3}{A_9^3}=\frac{3}{14}$.

辨析: 解答1的理解是"同色的旗子不加以区别", 解答2的理解是"同色的不同旗子是有区别的", 因此不能说谁对谁错, 只有加强题目条件才能避免上述情况. 可以将题目条件加强为: 若同色的旗子均认为是完全一样的, 此时解答1就合乎情理了.

例2　(浙江省台州市2010年3月份模拟卷) 将3个完全相同的小球随机地放入编号依次为1, 2, 3, 4, 5的盒子里, 用随机变量ξ表示有球盒子编号的最大值.

(1) 求$P(\xi=2)$;

(2) 求ξ的分布列和数学期望$E\xi$.

解答1 (标准答案): (1) 由于是"完全相同"的三个小球, 因此, 把这三个小球放入有编号的5个盒子中, 其结果有三:

(i) 三个小球在其中的3个盒子中, 有C_5^3种;

(ii) 三个小球分别在其中的2个盒子中, 有$C_5^1\cdot C_4^1$种;

(iii) 三个小球都在其中的1个盒子中, 有C_5^1; 这样共有$C_5^3+C_5^1C_4^1+C_5^1=35$种. 而$\xi=2$表示的情形有$1+C_2^1=3$种. 所以, $P(\xi=2)=\frac{3}{35}$.

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{15}{35}$

(2) ξ的分布列同上, 数学期望$E\xi=4$.

解答2: (1) 这里虽然是"完全相同"的三个小球, 把这三个小球放入有编号的5个盒子中, 不能只看结果情形, 还要考虑"放入"的过程次数多少, 这样出现的基本事件是等可能的. 因此, 放入有编号的5个盒子中, 每一个球有5种选择方法, 则结果共有5^3种. 同理$\xi=2$表示的情形有2^3-1种. 所以, $P(\xi=2)=\frac{7}{125}$.

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{61}{125}$

(2) ξ的分布列同上, 数学期望$E\xi=\frac{21}{5}$.

辨析: 按照解答1的理解, 对基本事件的个数从结果上去考虑有35种, 因此得到$P(\xi=2)=\frac{3}{35}$, 这就默认了这些结果是等可能事件. 事实上, 三个小球在同一盒子中的概率为$\frac{5}{125}$, 三个小球在三个盒子中的概率为$\frac{60}{125}$, 显然不是等可

能事件. 遇到这样的问题, 必须将其转化为基本事件是等可能出现的.

例3 (2009年江南五校联考试题) 如图1, 已知半圆的直径$AB=2R$, 作平行于AB的弦MN, 求使得弦$MN<R$的概率.

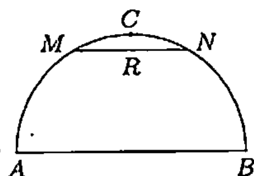


图1

解答1(参考答案): 记弦$MN<R$为事件A, 由于平行于AB的弦MN落在半圆内, 故总的测度为半圆面积, 当弦MN落在弓形MCN中时事件A发生, 故弓形面积为事件A发生的测度, 于是:

$$P(A)=\frac{S_{弓形MCN}}{S_{半圆}}=\frac{\frac{1}{6}\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}.$$

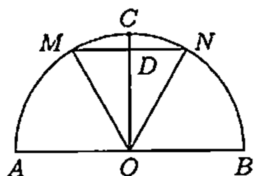


图2

解答2: 如图2, M在$\overset{\frown}{AC}$上运动, 当$MN=R$时, $\angle MOC=\frac{\pi}{6}$, 而$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$, 于是$P(A)=\frac{\angle MOC}{\angle AOC}=\frac{1}{3}$.

解答3: 如图2, 平行于AB的弦MN对应OC上任一点D, 故线段OC长为总测度, 当$MN<R$时, 事件A的测度为线段CD的长, 于是:

$$P(A)=\frac{CD}{OC}=\frac{R-\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

辨析: 几何概型问题一定要搞清楚等可能的角度是什么. 同一个问题不同角度考虑, 会产生不同答案, 如著名的"贝特朗悖论", 有三种以上答案. 因此, 在试题中应明确问题指定的角度, 避免出现不同答案.

例4 (参考教辅资料《必修3教材解析》) 如图3, 若在等腰直角三角形ABC中, 过直角顶点C在$\angle ACB$内部作一条射线CM与AB交于点M, 求$AM<AC$的概率.

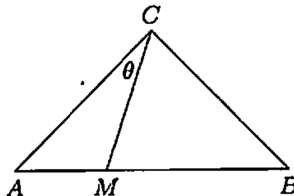


图3

解答1(参考答案): 设事件A为"线段AM长小于线段AC长", 点M在线段AB上均匀移动为背景作为等可能, 设$AC=1$, $AB=\sqrt{2}$, 所以$P(A)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解答2: 设事件A为"线段AM长小于线段AC长", 射线CM与AC所成角为均匀增长, 故以角度的增长为背景是等可能的, 当$AM=AC$时, $\theta=67.5°$, θ在$0°$到$90°$变化, 因此$P(A)=\frac{67.5}{90}=\frac{3}{4}$.

辨析: 题意中隐含了线段CM在$\angle ACB$中均匀分布的假设, 而解答1却把它理解为点M在AB上均匀分布. 因此, 解答1是不符合题意的.

2. 小结

(1) 例1属于题意条件不清, 因此答案不唯一; 例2属于命题者忽略了古典概型必须是以等可能的基本事件为背景的条件; 例3、例4属于命题者和解题者对等可能假设的不同理解. 希望以上几例引起命题者重视.

(2) 笔者发现, 编制的错误概率试题, 往往都是编题者对概率问题中等可能的判断出现偏差. 排列组合中有很多试题求方法种数, 但教学中并不审视这些方法种数是否是等可能的, 因此将这样的想法带进概率教学中去是有害的!

(3) 教材和考纲所要学生解决的是以等可能为背景出现的基本事件建构的概率问题, 因此必须将概率问题转化为等可能背景求解.

(4) 对基本事件是否是等可能的判断不是教学的重点, 但用到基本事件去解决概率问题的话, 在现阶段必须是等可能的, 否则学生无法求解. 笔者认为一方面能利用基本事件解决一些实际问题, 但也要考虑基本事件的等可能性; 另一方面, 就本文所涉及的内容可以选择性地编写试题, 因为几何概型与古典概型中基本事件等可能的判断是整个概率教学的基础.

对2011年全国高考大纲卷理科第21题的研究

201600 上海市松江二中 卫福山

2011年高考已经落下帷幕，但高考给我们留下了很多宝贵的资源，其中有很多值得研究的好题，比如2011年高考数学全国大纲卷理科第21题(文科第22题)就是一道值得好好研究的好题，题目如下:

题目：已知O为坐标原点，F为椭圆$C: x^2+\frac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点，过点F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点，点P满足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

(I) 证明：点P在C上；

(II) 设点P关于点O的对称点为Q，证明：A、P、B、Q四点在同一圆上.

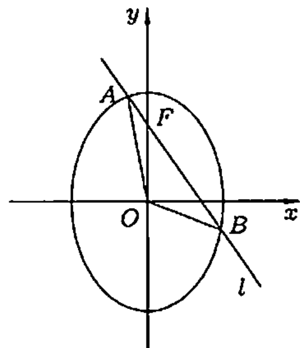


图 1

下面笔者拟从多角度研究此高考题，不足之处请予指正.

一、考题的多种解答

上述高考试题是证明点在曲线上及平面上四点共圆问题，考查的知识点主要是直线与椭圆的基础知识，经过笔者研究，主要有以下多种证明方法.

(I) 证法1：$F(0,1)$，$l_{AB}: \sqrt{2}x+y-1=0$，于是

$$\begin{cases}\sqrt{2}x+y-1=0,\\ x^2+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Longrightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)、B\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$得$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，显然点$P$坐标满足椭圆$C$的方程，故点$P$在$C$上.

证法2：$F(0,1)$，$l_{AB}: \sqrt{2}x+y-1=0$，于是

$$\begin{cases}\sqrt{2}x+y-1=0,\\ x^2+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$$

$$\Longrightarrow x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_1+y_2=1,$$

即点A、B的中点坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$.

以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$，则$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，显然$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

结合已知条件知$\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OC}$，联系椭圆的对称性知点$P$在$C$上.

(II) 证法1：由(I)得$A\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$、$B\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$、$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，而点$Q$与点$P$关于原点对称，故$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

利用向量或余弦定理容易计算$\cos\angle APB+\cos\angle AQB=0$，即四边形$APBQ$对角互补，从而四点共圆.

证法2：由(I)易求得PQ的直线方程为$y=\sqrt{2}x$，设AB与PQ的交点为R，由

$$\begin{cases}y=-\sqrt{2}x+1,\\ y=\sqrt{2}x\end{cases}\Longrightarrow R\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right),$$

故$|PR|\cdot|QR|$

$$= \sqrt{1+k_{PR}^2}|x_P - x_R| \cdot \sqrt{1+k_{QR}^2}|x_Q - x_R| = \frac{9}{8},$$

$$|AR| \cdot |BR| = \sqrt{1+k_{AR}^2}|x_A - x_R| \cdot \sqrt{1+k_{BR}^2}|x_B - x_R| = \frac{9}{8},$$

$\therefore |PR| \cdot |QR| = |AR| \cdot |BR|$, 由圆的相交弦定理的逆定理知$A$、$P$、$B$、$Q$四点共圆.

二、考题的深入研究

上述高考试题经过研究, 可以得出很多有意思的结论.

1. 原题的另一种叙述

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{0}$及点$P$关于点$O$的对称点为$Q$, 则$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, 即点$Q$实际上是以$OA$, OB为邻边的平行四边形的一个顶点, 当然这里点Q也在椭圆上, 于是原题可以这样叙述为

命题1 已知O为坐标原点, F为椭圆C: $x^2+\frac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点, 过点F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点, 则以OA、OB为邻边的平行四边形的第四个顶点Q一定在椭圆C上, 且A、B、Q及点Q关于原点的对称点P四点共圆.

注意到直线AB的斜率为$-\sqrt{2}$, 而直线PQ的斜率为$\sqrt{2}$, 直线AB与PQ相交, 因此线段AB与PQ即是圆的两条相交弦, 也可以理解为椭圆C的两条相交弦. 于是本题也提供了一个如何经过椭圆上四点作出圆的方法, 即

命题2 已知O为坐标原点, F为椭圆C: $x^2+\frac{y^2}{2}=1$在y轴正半轴上的焦点, 过点F且斜率为$-\sqrt{2}$的直线l与C交于A、B两点, 过原点O且斜率为$\sqrt{2}$的直线l'与C交于P、Q两点, 则A、P、B、Q四点共圆.

由于直线AB与PQ交于R点, 因此直线AB与PQ可以认为是过椭圆内定点的两条相交直线, A、P、B、Q即这两条相交直线与椭圆的交点, 于是可以得到如下的结论.

命题3 已知O为坐标原点, $R\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$为椭圆$C$: $x^2+\frac{y^2}{2}=1$内定点, 过点R作斜率分别为$-\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$的直线l、l'与C交于点A、P、B、Q, 则A、P、B、Q四点共圆.

2. 一般化及推广研究

对于上述考题能否推导一般化结论呢? 笔者经过研究得到一系列结论.

命题4 已知O为坐标原点, F为椭圆C: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的焦点, 过焦点$F$作一条直线与椭圆$C$交于$A$、$B$两点, 则以线段$OA$、$OB$为邻边所作的平行四边形的第四个顶点$Q$在椭圆$C$上的充要条件是椭圆$C$的离心率$e\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, 且直线$AB$的斜率$k_{AB}=\pm\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{b}$. 此时, 若$a^2=2b^2$, 则$A$、$B$、$Q$及点$Q$关于原点的对称点$P$四点共圆.

证明: 仅对椭圆在y轴正半轴上的焦点为例加以证明, 至于在y轴负半轴上的焦点同理可证. 设$F(0,c)$, 其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

先证必要性. 显然直线AB的斜率存在, 设$l_{AB}: y=kx+c$, $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则

$$\begin{cases} y=kx+c, \\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (a^2+b^2k^2)x^2+2b^2ckx-b^4=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2}, \\ y_1+y_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}, \end{cases}$$

利用平行四边形的性质易得

$$Q\left(-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2},\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}\right),$$

由于点Q在椭圆C上, 代入得

$$\frac{\left(\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2}\right)^2}{b^2}=1$$

$$\Longrightarrow k^2=\frac{4c^2-a^2}{b^2}=\frac{3a^2-4b^2}{b^2},$$

于是$3a^2-4b^2\geqslant 0$

$$\Longrightarrow e\in\left[\frac{1}{2},1\right), \text{且} k_{AB}=\pm\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{b}.$$

再证充分性. 设$l_{AB}: y=kx+c$, $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则$\begin{cases} y=kx+c, \\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \end{cases} \Longrightarrow (a^2+b^2k^2)x^2+2b^2ckx-b^4=0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2}, \\ y_1+y_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}, \end{cases}$

于是AB的中点为$R\left(\frac{-b^2ck}{a^2+b^2k^2},\frac{a^2c}{a^2+b^2k^2}\right)$, 则点$O$关于点$R$的对称点为

$Q\left(\frac{-2b^2ck}{a^2+b^2k^2},\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}\right)$,

将点Q的坐标代入到椭圆C的方程中, 并将$k_{AB}=\pm\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{b}$代入得

$$\frac{\left(\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2}\right)^2}{b^2}$$
$$=\frac{4c^2(a^2+b^2k^2)}{(a^2+b^2k^2)^2}=\frac{4c^2}{a^2+b^2k^2}$$
$$=\frac{4c^2}{a^2+b^2\left(\pm\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{b}\right)^2}=1.$$

即点Q在椭圆上, 由于四边形$OAQB$的对角线互相平分, 于是四边形$OAQB$构成一个平行四边形, 结论成立.

下面证明若$a^2=2b^2$, 则A、B、P、Q四点共圆.

$l_{AB}:y=kx+c$, 其中$k=\pm\frac{\sqrt{3a^2-4b^2}}{b}$.

因为$a^2=2b^2$, 所以$k^2=\frac{3\cdot 2b^2-4b^2}{b^2}=2$.

$$k_{PQ}=k_{OQ}=-\frac{\frac{2a^2c}{a^2+b^2k^2}}{\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2}}=-\frac{2a^2c}{2b^2ck}=-\frac{2}{k}$$

$=-k$, 因此$l_{PQ}:y=-kx$.

故A、B、P、Q四点满足方程$(kx-y+c)(kx+y)=0$. 又A、B、P、Q四点在椭圆C: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上, 于是经过$A$、$B$、$P$、$Q$四点的二次曲线系方程可设为$(kx-y+c)(kx+y)+\lambda\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}-1\right)=0$,

整理得$\left(k^2+\frac{\lambda}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{\lambda}{a^2}-1\right)y^2+ckx+cy-\lambda=0$. ……………………………………(*)

当$k^2+\frac{\lambda}{b^2}=\frac{\lambda}{a^2}-1$时, 即

$\lambda=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(k^2+1)=-6b^2$, 方程(*)变为$4x^2+4y^2-ckx-cy-6b^2=0$.

由于$(-ck)^2+(-c)^2-4\cdot 4\cdot(-6b^2)=3c^2+96b^2>0$, 所以$4x^2+4y^2-ckx-cy-6b^2=0$表示一个圆的方程, 即$A$、$B$、$P$、$Q$四点均在方程为$4x^2+4y^2-ckx-cy-6b^2=0$的圆上.

命题4研究的是焦点在y轴上的椭圆的情形, 对于焦点在x轴上的椭圆, 有完全类似的结论, 现叙述如下.

命题5 已知O为坐标原点, F为椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的焦点, 过焦点$F$作一条直线与椭圆$C$交于$A$、$B$两点, 则以线段$OA$、$OB$为邻边所作的平行四边形的第四个顶点$Q$在椭圆$C$上的充要条件是椭圆$C$的离心率$e\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, 且直线$AB$的斜率$k_{AB}=\pm\frac{b}{\sqrt{3a^2-4b^2}}$或斜率不存在. 此时, 若$a^2=2b^2$, 则$A$、$B$、$Q$及点$Q$关于原点的对称点$P$四点共圆.

命题5的证明与命题4完全类似, 留给读者自行完成.

三、从命题背景研究

命题者的出题思路或背景是高考试题研究者关注的, 对于上述高考试题, 笔者仔细翻阅了人教版教材, 找到了"蛛丝马迹".

人教A版选修4-4第38页例4有如下的一道例题: 已知AB、CD是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的两条相交弦, 交点为$P$, 且它们的倾斜角互补(如图2所示), 求证

$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$.

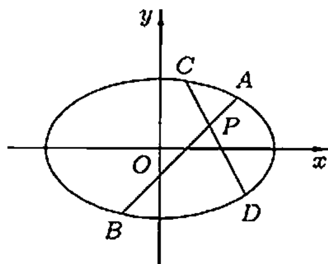


图2

以上例题的结论类似于圆中的"相交弦定理", 从中可以看出圆中有些结论可以类比推广到椭圆中. 而在圆中有"割线定理", 那么在椭圆中有"割线定理"吗? 双曲线与抛物线呢? 关于这些问题, 文[1]进行了详细的研究, 得到了如下的两个结论.

结论1 如果圆锥曲线(标准方程)的两条弦AB、CD所在直线的交点为P, 且它们的倾斜角互补, 那么$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$, 且$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆.

结论2 如果圆锥曲线(标准方程)的两条弦AB、CD所在直线的交点为P, 那么A、B、C、D四点共圆的充要条件是直线AB、CD的倾斜

利用GeoGebra研究试题的几个切入点

311200 浙江省杭州市萧山区第十一高级中学 沈灿江

研究试题是教师的常规工作, 它对精选例题、习题、考题有用, 对抑制题海战术有利, 对提高教学效率有益. 研究试题一般可以从试题的立意、试题的背景、试题的解法、试题的推广、试题的命制思路、试题命制中的瑕疵等几个方面入手. 有些试题的图形比较复杂, 有些试题仅画草图则研究不够精确, 特别是一些动态问题, 画草图很难体现其动态的过程, 所以在平时的教学工作中, 笔者常常借用GeoGebra来研究试题.

GeoGebra(Geometry+Algebra) 是2002年由美国佛罗里达州大学的Markus Hohenwarter教授所设计的一款结合几何、代数和微积分的免费动态数学软件, 迄今为止, 已获得十一项国际荣誉, 包括欧洲和德国的教育软件奖项. 与几何画板、超级画板等软件相比, GeoGebra的特点主要有以下几点: (1) 功能强大, 集几何作图、代数运算和数据处理于一体, 适用于大中小学数学的教与学, 可避免多个软件相互切换; (2) 易于交流和学习, 特有的"作图过程"与"作图过程导航条"可再现课件的制作过程, 真正做到"所见即所得"; (3) 免费软件, 资源共享, 基于Java程序编写, 便于远程交流和网上学习.

本文以笔者自身实践为基础, 以试题的命制思想、试题的命制背景、试题的命制瑕疵为切入点, 介绍GeoGebra在试题研究中的应用.

一、研究试题的命制思路

案例1[1] 已知定义在实数集R上的偶函数$f(x)$的最小值为3, 且当$x \geqslant 0$时, $f(x)=3\mathrm{e}^x+a$, 其中e为自然对数的底数.

(1) 求函数$f(x)$的解析式;

(2) 求最大的整数$m(m>1)$, 使得存在$t\in\mathbf{R}$, 只要$x\in[1,m]$, 就有$f(x+t)\leqslant 3\mathrm{e}x$.

本题设计巧妙, 很好地对2002年全国高中数学竞赛一试的压卷题进行了改编, 但是学生感觉第(2)小题很难入手, 甚至连读懂题意都有困难, 所以笔者尝试利用GeoGebra对试题的命题思路进行了探究.

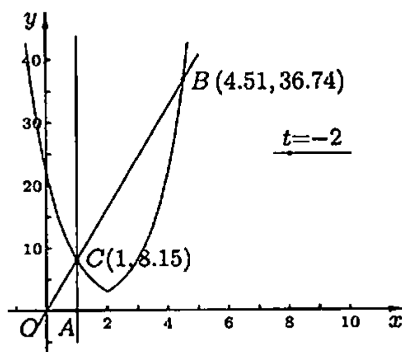


图1

从第(1)小题求得$f(x)=3\mathrm{e}^{|x|}$, 利用软件的"滑杆"工具新建参数t, 然后在"命令框"中输入"$g(x)=3\mathrm{e}x$", "$h(x)=3\mathrm{e}\wedge(\mathrm{abs}(x+t))$", 按ENTER键生成函数图像. 拖动"滑杆"改变参数t的值, 如图1所示, 发现当$t=-2$时, $g(x)=3\mathrm{e}x$和$h(x)=3\mathrm{e}^{|x+t|}$的其中一个交点横坐标恰好为$x=1$, 而此时另一个交点的横坐标为$x=4.51$, 即存在$t=-2$, 只要$x\in[1,4.51]$, $3\mathrm{e}^{|x+t|}\leqslant 3\mathrm{e}x$恒成立, 所以$m=4.51$满足题意, 当$m>4.51$时, 无论$h(x)=3\mathrm{e}^{|x+t|}$左移还是右移(参数$t$的改变), 均存在$x\in[1,m]$, 使$3\mathrm{e}^{|x+t|}>3\mathrm{e}x$, 所以此时不存在$t$满足题意, 所以$m\leqslant 4.51$, 但是如果没有计算器, 要求出$m=4.51$是不可能

角互补.

实质上上述结论类似于圆中的"圆幂定理及其逆定理". 因此在以上背景研究的基础上, 我们对高考考题有了一个更深入的认识, 并且我们还可以类似地去研究双曲线、抛物线的情形.

参考文献

[1] 郑观宝. 一道课本习题的探究、推广与应用[J]. 数学教学, 2011 (1): 26-28.

的，所以命题者又巧妙地将问题设置为求整数m的最大值，在降低题目难度的同时，又考查了导数的应用和函数零点存在定理.

将上述探究过程翻译成代数语言，就是命题者所给出的参考答案. 这样的探究使学生更容易明白为什么一开始要用特殊值$f(1+t)\leqslant 3\mathrm{e}$求出$-2\leqslant t\leqslant 0$，然后再用能成立问题的解题思路求得$\mathrm{e}^{-2}\leqslant\frac{\mathrm{e}m}{\mathrm{e}^{m}}$，为了求出满足上述不等式的最大整数$m$，要构造函数，用导数和零点存在定理解决. 所以探究试题的命题思路，不仅可以让学生更加深刻地理解题目的本质，提高试题讲评的效率，还可以进一步提高教师的解题能力和命题水平.

二、研究试题的命制背景

案例2 (2007年全国高考陕西卷理科第21题) 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆C的方程.

(2) 设直线l与椭圆C交于A、B两点，坐标原点O到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle AOB$面积的最大值.

本题(1)求得椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 本题(2)的参考答案利用联立方程、韦达定理、基本不等式求得$|AB|_{\max}=2$，即$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$，但是计算过于复杂；考虑到本题是一道动态最值问题，要想简化方法，必须找到运动过程中不变的因素，所以笔者用GeoGebra对其进行了探索.

首先在"命令框"中输入"$x^2/3+y^2=1$"和"$x^2+y^2=3/4$"，得到相应的椭圆和圆的方程，然后在圆O上任取一点P，利用"切线"工具过点P作圆O的切线l(因为圆O的半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以原点O到切线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以切线l就是题目条件所给的直线l)，再利用"交点"工具作出切线l与椭圆的两个交点A、B，然后利用"多边形"工具构造$\triangle AOB$，并用"测量面积"工具测其面积为Area AOB，最后利用"测量角度"工具测得$\angle AOB$的大小，如图2所示.

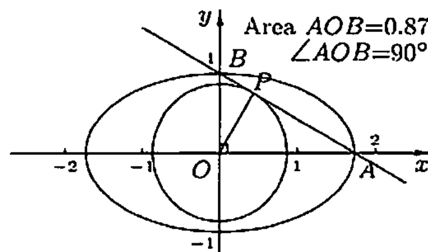


图 2

拖动点P，我们可以看到，$\triangle AOB$的面积Area AOB在连续的变化，但是$\angle AOB$的大小却始终等于90°，这就是运动变化中的不变量，也是本题命题的背景：对定点张直角的二次曲线弦问题. 有了对上述背景的本质认识，本题的解题思路也随之打开，$S_{\triangle AOB}$可以不依赖于弦$|AB|$而求得，如$S=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|$，把点坐标代入即可得$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，那么由柯西不等式可以一步得出结果：

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{x_1}{\sqrt{3}}\cdot y_2-\frac{x_2}{\sqrt{3}}\cdot y_1\right|$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{3}+y_1^2\right)\left(\frac{x_2^2}{3}+y_2^2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

也可以将椭圆参数方程代入$S_{\triangle AOB}$，得$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\sin(\alpha-\beta)|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 而且本题的改编也就非常顺其自然了，比如在GeoGebra中增大圆的半径，可以发现$\angle AOB$都是锐角，减小圆的半径，$\angle AOB$都是钝角，所以当$\angle AOB$为直角时，圆的半径应该满足一定的条件，所以可以命制下面的试题：

改编：已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$，坐标原点为$O$.

(1) 求椭圆C的方程.

(2) 设直线l与椭圆C交于A、B两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求$O$到直线$l$的距离.

更进一步，可以将$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$换成$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}$等，当然也可以从$\triangle AOB$的面积、弦$AB$的长度，直线$AB$的方程等入手改编试题.

三、研究试题的命制瑕疵

案例3[2] 从双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>$

0)的左焦点F_1引圆$x^2+y^2=a^2$的切线l，切点为T，且l交双曲线的右支于点P，若点M是线段F_1P的中点，O为坐标原点，则$|OM|-|TM|=$ ______.

参考答案运用了平面解析几何知识与双曲线的定义，很巧妙地解决了本题，得到答案为$b-a$，但是仔细分析参考答案，发现其中非常关键的一步$|MF_1|=|MT|+|TF_1|$需要点T落在点M与点F_1之间，但是参考答案却没有说明，这引起了笔者探索的兴趣.

在GeoGebra中利用"滑竿"工具建立两个参数a和b，然后在命令框中输入"$x^2+y^2=a^2$"和"$x^2/a^2-y^2/b^2=1$"，得到相应的圆和双曲线图像，再输入"$F_1=(-\mathrm{sqrt}(a^2+b^2),0)$"得到双曲线的左焦点$F_1$，利用"切线"工具过点$F_1$作圆的切线$l$，切点为点$T$，用"交点"工具作$l$与双曲线右支的交点为点$P$，再利用"中点"工具构造$F_1P$中点为$M$，如图3、图4、图5所示.

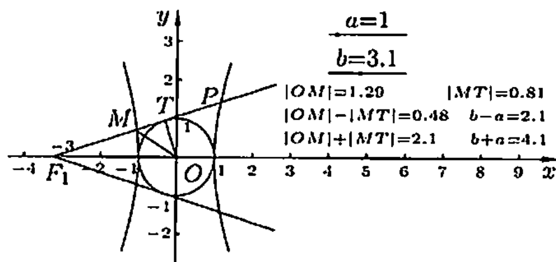


图3

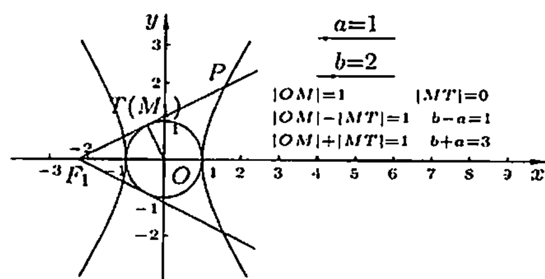


图4

固定参数$a=1$，拖动参数b，可以发现如下结论：当$b>2a$时(如图3)，点T落在点M与点P之间，此时$|OM|-|TM|$不是定值，但$|OM|+|TM|$恒为定值$b-a$；当$b=2a$时(如图4)，点T与点M重合，此时$|OM|=b-a$，当$b<2a$(如图5)，点T才落在点M与点F_1之间，此时$|OM|-|TM|$恒等于$b-a$.

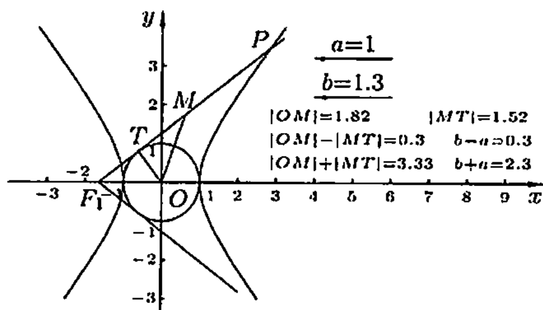


图5

通过GeoGebra的探究分析，上述问题答案确实不唯一，可以通过添加条件$b>2a$来唯一确定答案，但是考虑到学生在面对条件$b<2a$时很难将之转化为点T落在点M与点F_1之间，虽然可以用方程思想研究，但运算量太大，增加了题目的难度，所以可以在题目旁边附上图5，这样用参考答案解答就会非常方便. 所以笔者猜测，可能是命题者在命题时遗漏了图像.

由上述几个案例可以看出，利用GeoGebra研究试题确实有其过人之处，但是，GeoGebra作为工具，其目的是让我们理解数学问题更简单，更深刻，所以在平常使用过程中，一定要提炼现象背后的本质，让GeoGebra真正为我们研究试题所用.

参考文献

[1] 李平龙. 我为高考设计题目[J]. 数学通讯, 2009(12): 40.

[2] 张网军, 丁爱年. 一道错题的剖析与探究[J]. 中学数学教学参考, 2011(3): 44.

(上接第3-16页)

何妨?

这些问题都是学生在学习"课内"知识过程中产生的"课外"问题，其思维方式完全不同于我们老师编制的那些"无病呻吟"的延伸拓展题，新颖、独特、妙不可言. 难怪爱因斯坦说"提出一个问题往往比解决一个问题更重要". 我们老师如果不鼓励学生质疑，搭建让学生质疑的平台，或许，我们根本无法了解我们的孩子有多聪明，尽管他们在数学学习中显现出来的智商可能很平常，但蕴含的创造力与想象力远远超出成人，而未来社会最需要的就是创新精神和创造能力. 怎样保持和发展学生的想象力和创造力，是我们教者应该进一步思考和研究的问题.

编后漫笔

中国教育是不是有“美”的一面?

张奠宙 赵小平

近来再次读到费孝通先生关于文化交流的名言: 各美其美, 美人之美, 美美与共, 世界大同. 世界文化的多元性, 决定了这一兼容并包、各国互相学习的国际走向. 掩卷沉思, 不禁想到了中国的教育.

教育是具有民族色彩的, 也是多元的, 应该适用费孝通先生的美美与共的大同之构想. 于是, 首要的问题是, 中国教育美在哪里? 在有关当代中国教育的重要文件和文献中, 找不到比较权威的论述.

晚近以来, 所谓“传统的”中国教育方式, 几乎成了“落后”、“陈旧”的代名词. 死记硬背、机械模仿、目中无人、没有生命等形容词都用上了, 还有什么“美”可谈? 更有甚者, 中国本土的科学家没有获得诺贝尔奖, 也怪罪于基础教育, 真的是一无是处了. 中国经济起飞难道没有得到数学教育的成功支撑?

这样一来, “各美其美”似乎不包括中国当代的教育, 剩下的就只能去“美人之美”. 君不见, 杜威的实用主义教育学说, 被奉为当今中国课程改革的理论基础; 具有唯心主义倾向的建构主义学说被当做“绝对真理”、“学习论的新纪元”加以颂扬; ××后现代主义可以不加分析地加以引进. 更有甚者, “知识不是力量”、“教室改为学室”之类的颠覆性口号不时可闻. 这样做, 是不是有点过分了?

中国教育有自己之“美”, 我们需要民族自信, 中国教师是中国优秀教育传统的守望者. 我们需要前进, 需要学习, 需要谦虚, 但是不要唱衰自己, 自惭形秽, 弄得灰头土脸. 总之, 还是“各美其美, 美人之美”为好.

(上接第3-10页)

数概念, 这样学生可能会更好地理解函数概念.

参考文献

[1] 邱万作主编. 九年义务教育课本. 数学. 八年级第一学期[M]. 上海市: 上海教育出版社, 2006. 7.

[2] 林群主编. 义务教育课程标准实验教科书. 数学. 八年级上册[M]. 北京市: 人民教育出版社, 2008. 3.

[3] 袁震东主编. 高级中学课本. 数学. 高中一年级. 第一学期[M]. 上海市: 上海教育出版社, 2006. 8.

[4] 刘绍学主编. 普通高中课程标准实验教科书. 数学一[M]. 北京市: 人民教育出版社, 2007. 1.

[5] 张英伯, 曹一鸣丛书主编, 喻平编著. 数学教学心理学[M]. 北京市: 北京师范大学出版社, 2010. 1.

[6] 曹才翰, 章建跃著. 数学教育心理学[M]. 北京市: 北京师范大学出版社, 2006. 6.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第3期(总第295期)
名誉主编: 张奠宙
主编: 赵小平
常务副主编: 忻重义
发行范围: 公开
电话: 021-62232712

主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学
出版: 上海《数学教学》杂志社
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 3100720050001
印刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元 国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4 每月12日出版 代号: 4-357